

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**Etapă locală, 22 februarie 2020****Subiect clasa a XII-a****PROBLEMA 1**

Se consideră $G = \left\{ A_{a,b} = \begin{pmatrix} a + 3b & b \\ 4b & a + 3b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_6, \det(A) = 1 \right\}$.

(4p) a) Arătați că $(G, \cdot)$ este grup abelian de ordin patru, în care fiecare element coincide cu inversul său.

(3p) b) Determinați subgrupurile lui $(G, \cdot)$.

PROBLEMA 2

Fie $(G, \cdot)$ un grup cu element neutru e astfel încât $x^{-1} = x$, $\forall x \in G$ și $a \in G - \{e\}$. Arătați că oricare ar fi funcția $f: G \rightarrow G$, funcția $g: G \rightarrow G$, $g(x) = f(x) \cdot f(ax)$ nu este injectivă.

PROBLEMA 3

Să se determine toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, primitivabile, care verifică relația

$$F(x) + \ln(f(x)) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ unde } F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ este o primitivă a lui } f \text{ și } F(0) = 0.$$

PROBLEMA 4

(3p) i) Să se calculeze $\int \frac{\sin^2 x + \sin 2x + 1}{e^{-x} + \sin^2 x + 1} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Fie $I_n = \int \frac{x^n + nx + 1}{x^{n+2} + x^2} dx$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

(2p) a) Calculați I_1 .

(2p) b) Calculați I_n , $n \geq 2$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat fiecărei probleme este de 7 puncte.