



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}$, $O_2 = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$.

- a) Demonstrați că dacă $A \in G$ și $\det(A) = \widehat{0}$, atunci $A = O_2$;
- b) Demonstrați că $G \setminus \{O_2\}$ este parte stabilă față de înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$;
- c) Stabiliți dacă ecuația $X^{12} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & -\widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$, are soluții în mulțimea G .

PROBLEMA 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și mulțimea $Z(G) = \{x \in G : xy = yx, \forall y \in G\}$. Să se arate că dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul este comutativ.

PROBLEMA 3. Fie funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$.

Să se calculeze $\int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})} dt$.

PROBLEMA 4. Să se determine valorile lui $n \in \mathbb{N}$, pentru care

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{1+x^2} dx \in \mathbb{Q}.$$

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.