

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 8. 02. 2020 –****CLASA A V - A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.**

1. Se consideră numerele $a = \left[5^2 + 9^3 - (2^{15})^4 : 2^{56} - (14 + 4 \cdot 2^0)^2 : 3 \right] : (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$ și $b = (16 \cdot 19 - 18 \cdot 16)^4 : 8^5$. Determinați restul împărțirii sumei $a^{2018} + b^{2020}$ la 5.
2. Se consideră numărul $a = \underbrace{111 \dots 11}_{2019 \text{ de } 1}_{(2)}$.
 - a) Arătați că $a + 1 = 2^{2019}$.
 - b) Demonstrați că $a + 1$ se poate scrie ca sumă de patru numere impare consecutive.
3. Suma resturilor obținute prin împărțirea numerelor naturale $1, 2, 3, \dots, n - 1, n$ la 21 este egală cu 20166. Determinați valoarea lui n .
4. Determinați numerele naturale n care verifică simultan relațiile $21 \mid (n + 4)$ și $131 \leq n \leq 215$.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 8.02.2020 –****CLASA A VI - A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.**

1. a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$, știind că $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = 611$.

b) Fie numerele naturale nenule a , b și c și proporțiile: $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, $\frac{3}{5} = \frac{b}{c}$.

Dacă $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} = 372$, determinați numerele a , b și c .

2. Se consideră mulțimea $M = \{\overline{ab} | a > b \text{ și } (a - b)^2 \text{ divide } a + b\}$. Determinați elementele mulțimii M .

3. În jurul punctului O se consideră cinci unghiuri: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOA$, astfel încât măsurile unghiurilor AOB , BOC , COD sunt direct proporționale cu numerele 3, 12, respectiv 7, iar măsurile unghiurilor COD , DOE , EOA sunt invers proporționale cu numerele 4, 2, respectiv 7.

a) Aflați măsurile celor cinci unghiuri.

b) Aflați măsura unghiului MON , unde OM și ON sunt bisectoarele unghiurilor AOB , respectiv EOA .

4. Se consideră unghiul ascuțit AOB și semidreapta $(OC$, semidreapta opusă semidreptei $(OA$. Construim $OD \perp OA$ și $OE \perp OB$ astfel încât punctele D și E sunt de aceeași parte cu B față de dreapta AC . Semidreapta $(OF$ este bisectoarea $\angle AOE$.

a) Demonstrați că $\angle AOB$ și $\angle COE$ sunt complementare.

b) Demonstrați că $(OF$ este bisectoarea $\angle BOD$.

c) Dacă se știe și că măsura $\angle AOB$ este o treime din măsura $\angle COE$, calculați măsura $\angle AOF$

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 8.02.2020 –**

CLASA A VII - A

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Fie $x = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5^2} + \sqrt{5^3} + \dots + \sqrt{5^{2019}}$.

a) Arătați că $x + 5^{1010} = x\sqrt{5} + 1$.

b) Arătați că $\frac{4x}{\sqrt{5}+1} + 1$ este pătratul unui număr natural.

2. Se consideră trapezul ABCD, cu $AB < CD$ și $AC \perp BD$. Dacă N este un punct oarecare pe segmentul OC, unde $AC \cap BD = \{O\}$ și P este intersecția perpendicularei din C pe DN cu dreapta BD, arătați că $BN \perp AP$.

3. a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, scrise în baza 10 cu cifre distincte, astfel încât $a+b=10$ și $\left\lceil \sqrt{ab} \right\rceil = 6$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

b) Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, scrise în baza 10 cu cifre distincte, astfel încât $a \cdot b = c$ și $n = \sqrt{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} - (\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}) - (a + b + c)}$ este număr natural.

4. MNPQ este dreptunghi, S este simetricul punctului P față de N, $QS \cap MN = \{R\}$ și $PR \cap MQ = \{T\}$.

a) Demonstrați că $TS = MN$.

b) Dacă $PR \cap QN = \{A\}$, demonstrați că $AT = 2 \cdot PA$.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 8.02.2020 –****CLASA A VIII - A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

1. Se consideră $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $4x^2 + y^2 + 4x - 12y = 12$. Să se arate că $x \in [-4; 3]$ și $y \in [-1; 13]$.
2. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:
 $3^y + 1 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$.
3. Fie ABCDA'B'C'D' un cub de latură a. Dacă M, N, P, M', N', P', sunt mijloacele muchiilor (AD), (AB), (AA'), (B'C'), (D'C'), respectiv (CC'):
 - a) Demonstrați că planele (MNP) și (M'N'P') sunt paralele;
 - b) Calculați distanța de la punctul A la planul (MNP).
4. Fie VABCD piramidă patrulateră regulată. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului VAC, F este centrul de greutate al triunghiului ABD, iar M este mijlocul segmentului (BG), demonstrați că $FM \parallel (VCD)$.