



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapalocală
18februarie 2017

Clasa a IX-a

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, unde $0 < a_1 < a_2$. Să se arate că pentru orice $p, n \in \mathbb{N}^*$, $2 \leq 2p \leq n$, există relația:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k \cdot a_{k+2p-1}} \geq \frac{n+1-p}{a_p \cdot a_{n+1}},$$

cuegalitadedacășinumaidacă $p = 1$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$[x]^2 - 2 \cdot x + 6 \cdot \{x\} = \pi,$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

3. Fie ABC un triunghi oarecare și $O \in \text{Int } ABC$ un punct mobil. Fie $AO \cap BC = \{A'\}$, $BO \cap CA = \{B'\}$, $CO \cap AB = \{C'\}$, $B'C' \cap AO = \{D\}$. Să se aratecă:

$$\frac{C'D}{B'D} \cdot \frac{B'C}{C'B} = \text{constant}.$$

4. Se consideră triunghiul ABC înscris în cercul $C(O, R)$ și se notează cu A', B', C' punctele diametral opuse lui A, B, C , respectiv G_a, G_b, G_c , centrele de greutate ale triunghiurilor $A'BC$, $AB'C$, ABC' .

- Să se exprime vectorul $\overrightarrow{G_a G_b}$ în funcție de vectorul $\overrightarrow{AB}$.
- Arătați că: $\mathcal{A}[ABC] = \frac{9}{4} \mathcal{A}[G_a G_b G_c]$.
- Să se arate că dreptele AG_a, BG_b, CG_c sunt concurente într-un punct P .
- Să se arate că O, G, P sunt coliniare, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , G centrul de greutate, iar P este punctul de concurență.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.