

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. a) (4p) Determinați numărul n pentru care are loc egalitatea:

$$\left(\frac{7}{9} + \frac{77}{99} + \frac{777}{999}\right)^2 : \frac{7}{9} - \frac{111}{200} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{200}\right)^n = 6.$$

b) (3p) Dacă $a = \frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{35}}$ și $b = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{35} + \sqrt{21}}$, arătați că $\frac{a+b}{\sqrt{7}}$ este un număr natural.

Claudia Marchitan

Soluție: a) Avem $\left(\frac{7}{9} + \frac{7}{9} + \frac{7}{9}\right)^2 : \frac{7}{9} - \frac{111}{200} : \left(\frac{100}{200} + \frac{10}{200} + \frac{1}{200}\right)^n = 6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(3 \cdot \frac{7}{9}\right)^2 : \frac{7}{9} - \frac{111}{200} : \left(\frac{111}{200}\right)^n = 6 \Leftrightarrow 3^2 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^2 : \frac{7}{9} - \left(\frac{111}{200}\right)^{1-n} = 6 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{7}{9} - \left(\frac{111}{200}\right)^{1-n} = 6$$

$$\Leftrightarrow 7 - \left(\frac{111}{200}\right)^{1-n} = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{111}{200}\right)^{1-n} = 7 - 6 \Leftrightarrow \left(\frac{111}{200}\right)^{1-n} = 1 \Leftrightarrow 1 - n = 0 \Leftrightarrow n = 1$$

$$\text{b) } a = \frac{5}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{6}{\sqrt{7}} \text{ și } b = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{7}(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Atunci } \frac{a+b}{\sqrt{7}} = \frac{\frac{6}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}}}{\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{7}{7} = 1 \text{ care este număr natural.}$$

Barem:

a)	$\left(\frac{7}{9} + \frac{7}{9} + \frac{7}{9}\right)^2 : \frac{7}{9} - \frac{111}{200} : \left(\frac{111}{200}\right)^n = 6 \Leftrightarrow$	2p
	Ajunge la forma $9 \cdot \frac{7}{9} - \left(\frac{111}{200}\right)^{1-n} = 6$	1p
	Află că $\left(\frac{111}{200}\right)^{1-n} = 1$ de unde obține $n = 1$	1p
b)	$a = \frac{5}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{6}{\sqrt{7}}$	1p
	$b = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{7}(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{7}}$	1p
	$\frac{a+b}{\sqrt{7}} = \frac{\frac{6}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}}}{\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{7}{7} = 1$ care este număr natural	1p

2. a) (3p) Dacă n este multiplu de 5, arătați că numărul $\sqrt{2018 - n^2}$ este irațional.

b) (4p) Arătați că oricare ar fi numărul întreg x pentru care $2018 - x^2 \geq 0$, numerele $a = \sqrt{2018 - x^2}$ și $b = \sqrt{2018 + x^2}$ nu sunt simultan numere raționale.

Dorel Ispășoiu

Soluție: a) Dacă n este multiplu de 5, atunci ultima cifră a lui n este 0 sau 5. De aici ultima cifră a lui n^2 este 0 sau 5, fapt ce ne conduce la ultima cifră a lui $2018 - n^2$ este 8 sau 3, deci $2018 - n^2$ nu este pătrat perfect și atunci $\sqrt{2018 - n^2}$ este irațional.

b) Dacă x este număr întreg, atunci ultima cifră a lui x^2 este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.

Dacă ultima cifră a lui x^2 este 0 sau 5 am arătat la punctul a) că $a = \sqrt{2018 - x^2}$ nu este rațional.

Dacă ultima cifră a lui x^2 este 1 sau 6, atunci ultima cifră a lui $2018 - x^2$ este 7, respectiv 2, deci $2018 - x^2$ nu este pătrat perfect și atunci $a = \sqrt{2018 - x^2}$ nu este rațional.

Dacă ultima cifră a lui x^2 este 4 sau 9, atunci ultima cifră a lui $2018 + x^2$ este 2, respectiv 7, deci $2018 + x^2$ nu este pătrat perfect și atunci $b = \sqrt{2018 + x^2}$ nu este rațional.

Deci numerele a și b nu sunt simultan numere raționale.

Barem:

a)	Ultima cifră a lui n este 0 sau 5 $\Rightarrow$ ultima cifră a lui n^2 este 0 sau 5	1p
	Ultima cifră a lui $2018 - n^2$ este 8 sau 3 $\Rightarrow 2018 - n^2$ nu este pătrat perfect	1p
	$\sqrt{2018 - n^2}$ este irațional	1p
b)	Ultima cifră a lui x^2 este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.	1p
	Dacă ultima cifră a lui x^2 este 0, 1, 5 sau 6, atunci ultima cifră a lui $2018 - x^2$ este 8, 7, 3, respectiv 2, deci $2018 - x^2$ nu este pătrat perfect și atunci $a = \sqrt{2018 - x^2}$ nu este rațional.	1p
	Dacă ultima cifră a lui x^2 este 4 sau 9, atunci ultima cifră a lui $2018 + x^2$ este 2, respectiv 7, deci $2018 + x^2$ nu este pătrat perfect și atunci $b = \sqrt{2018 + x^2}$ nu este rațional.	1p
	Deci numerele a și b nu sunt simultan numere raționale.	1p

3. (7p) Triunghiul ABC este triunghi ascuțitunghic, punctele D , E și F sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$, iar $[BP]$ este înălțime a triunghiului. Demonstrați că triunghiurile DEF și DEP sunt congruente.

Supliment Gazeta Matematică Nr.12/2017, text modificat

Soluție:

Din D , E și F sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, respectiv $[AC]$ avem $[DE]$, $[EF]$ și $[DF]$ linii mijlocii

în triunghiul ABC , iar de aici $DE = \frac{AC}{2}$, $EF = \frac{AB}{2}$ și

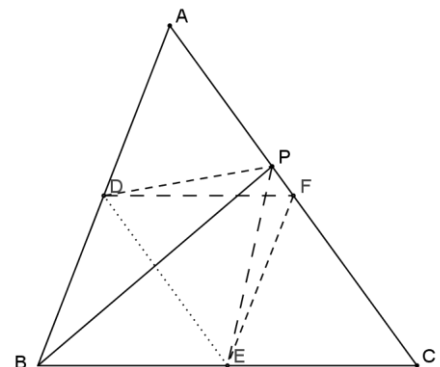
$$DF = \frac{BC}{2}.$$

Din $[PD]$ și $[PE]$ mediane corespunzătoare ipotenuzei în triunghiurile dreptunghice APB , respectiv BPC obținem

$$PD = \frac{AB}{2} \text{ și } PE = \frac{BC}{2}.$$

În $\triangle DFE$ și $\triangle EPD$ avem: $[DE] = [DE]$ (latură comună), $[EF] = [DP] \left(= \frac{AB}{2} \right)$ și $[DF] = [EP]$

$\left(= \frac{BC}{2} \right)$. Atunci, conform cazului L.L.L. avem $\triangle DFE \equiv \triangle EPD$.



Barem:

Figura		1p
	$[EF]$ și $[DF]$ linii mijlocii în triunghiul $ABC \Rightarrow EF = \frac{AB}{2}$ și $DF = \frac{BC}{2}$.	2p
	$[PD]$ și $[PE]$ mediane corespunzătoare ipotenuzei în triunghiurile dreptunghice APB , respectiv BPC obținem $PD = \frac{AB}{2}$ și $PE = \frac{BC}{2}$.	2p
	În $\triangle DFE$ și $\triangle EPD$ avem: $[DE] \equiv [DE]$ (latură comună), $[EF] \equiv [DP] \left(= \frac{AB}{2} \right)$ și $[DF] \equiv [EP] \left(= \frac{BC}{2} \right)$. Atunci, conform cazului L.L.L. avem $\triangle DFE \equiv \triangle EPD$.	2p

4. Se consideră patrulaterul ortodiagonal $ABCD$, $AC \perp BD$, $AC \cap BD = \{O\}$, $m(\angle ADC) = 90^\circ$, $[AC] \equiv [BD] \equiv [BC]$ și E piciorul perpendicularei din D pe BC , cu $E \in (BC)$. Demonstrați că:

- a) (4p) patrulaterul $CDOE$ este trapez isoscel;
b) (3p) Q este mijlocul lui $[AC]$, unde $\{Q\} = DE \cap AC$.

Gheorghe Iacoviță

Soluție:

a) Din $[BD] \equiv [BC] \Rightarrow \triangle BDC$ isoscel cu baza $[DC] \Rightarrow \angle BDC \equiv \angle BCD$ (1)

În triunghiurile dreptunghice $\triangle DOC$ și $\triangle CED$ avem: $[DC] \equiv [DC]$ (latură comună) și $\angle ODC \equiv \angle ECD$ (din relația (1)). Atunci, conform cazului I.U. avem $\triangle DOC \equiv \triangle CED$ iar de aici obținem $[DO] \equiv [CE]$.

Din $[DO] \equiv [CE]$ și $[BD] \equiv [BC]$ avem $\frac{DO}{BD} = \frac{CE}{BC}$ de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales aplicate în $\triangle BDC$ obținem $OE \parallel DC$.

Cum $OE \parallel DC$ și $OD \nparallel EC$ (pentru că $OD \cap EC = \{B\}$) $\Rightarrow CDOE$ trapez. Dar $[DO] \equiv [CE]$ și atunci $CDOE$ trapez isoscel.

b) În triunghiul BDC avem $[DE]$, $[CO]$ înălțimi și $\{Q\} = DE \cap CO$, atunci Q este ortocentrul triunghiului și de aici $BQ \perp DC$. Notând $BQ \cap DC = \{M\}$ avem $[BM]$ înălțime în triunghiul BDC isoscel cu baza $[DC] \Rightarrow [BM]$ mediană $\Rightarrow M$ mijlocul lui $[DC]$.

Din $BM \perp DC$ și $AD \perp DC$ obținem $BM \parallel AD$.

În triunghiul CAD avem: M mijlocul lui $[DC]$, $Q \in (AC)$ și $MQ \parallel AD$. Atunci, conform reciprocei teoremei liniei mijlocii obținem Q mijlocul lui $[AC]$.

Barem:

Figura		1p
a)	În triunghiurile dreptunghice $\triangle DOC$ și $\triangle CED$ avem: $[DC] \equiv [DC]$ (latură comună) și $\angle ODC \equiv \angle ECD$ (din relația (1)). Atunci, conform cazului I.U. avem $\triangle DOC \equiv \triangle CED$ iar de aici obținem $[DO] \equiv [CE]$	1p

	Din $[DO] \equiv [CE]$ și $[BD] \equiv [BC]$ avem $\frac{DO}{BD} = \frac{CE}{BC}$ de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales aplicată în $\triangle BDC$ obținem $OE \parallel DC$	1p
	Cum $OE \parallel DC$ și $OD \not\parallel EC$ (pentru că $OD \cap EC = \{B\}$) $\Rightarrow CDOE$ trapez. Dar $[DO] \equiv [CE]$ și atunci $CDOE$ trapez isoscel	1p
b)	În triunghiul BDC avem $[DE]$, $[CO]$ înălțimi și $\{Q\} = DE \cap CO$, atunci Q este ortocentrul triunghiului și de aici $BQ \perp DC$. Notând $BQ \cap DC = \{M\}$ avem $[BM]$ înălțime în triunghiul BDC isoscel cu baza $[DC] \Rightarrow [BM]$ mediană $\Rightarrow M$ mijlocul lui $[DC]$	1p
	Din $BM \perp DC$ și $AD \perp DC$ obținem $BM \parallel AD$	1p
	În triunghiul CAD avem: M mijlocul lui $[DC]$, $Q \in (AC)$ și $MQ \parallel AD$. Atunci, conform reciprocei teoremei liniei mijlocii obținem Q mijlocul lui $[AC]$	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.