OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală , SĂLAJ , 10.02.2024
Clasa a XII - a

BAREM

Subiectul 1

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea

$$G=\left\{X_a \in M_2(\mathbf{R}) \middle| X_a = I_2 + aA,\, a>-\frac{1}{2}\right\}.$$

(3p) a) Arătați că G este parte stabile a lui $M_2(R)$ în raport cu înmulțirea matricelor, apoi demonstrați că structura algebrică $(G,\cdot)$ este grup abelian.

(2p) b) Demonstrați că funcția $f:G\to\mathbf{R},\ f(X_a)=\ln(2a+1)$ este izomorfism între grupurile $(G,\cdot)$, respectiv $(\mathbf{R},+)$.

(2p) c) Calculați $X_{\frac{1}{2}}\cdot X_{\frac{3}{2}}\cdot\ldots\cdot X_{\frac{2n-1}{2}},\ n\in\mathbf{N}^*$.

Barem de corectare:

a) $X_a=\begin{pmatrix}1+a & a\\ a & 1+a\end{pmatrix}, a>-\frac{1}{2}$; respectiv $A^2=2A$;

$X_a\cdot X_b=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b)A+abA^2=I_2+(a+b+2ab)A$

deoarece $a+b+2ab>-\frac{1}{2}\Leftrightarrow(2a+1)(2b+1)>0,\ \forall\ a,b>-\frac{1}{2}$, atunci

$\Rightarrow X_a\cdot X_b=X_{a+b+2ab}\in G,\ \forall\ X_a, X_b\in G\Rightarrow G$ este parte stabilă a lui $M_2(R)$ în raport cu înmulțirea matricelor.. 1 punct

Se verifică dacă sunt îndeplinite axiomele grupului abelian:

$G_1:(X_a\cdot X_b)\cdot X_c=X_a\cdot(X_b\cdot X_c),\ \forall\ X_a, X_b, X_c\in G$

Avem: $(X_a\cdot X_b)\cdot X_c=X_{a+b+2ab}\cdot X_c=X_{a+b+c+2(ab+ac+bc)+4abc}$

$G_2: I_2=I_2+0\cdot A=X_0\in G$ este elementul neutru în G, în raport cu înmulțirea matricelor

$G_3:\forall\ X_a\in G, \exists\ X_{a'}=X_{-\frac{a}{1+2a}}\in G, \frac{-a}{1+2a}>-\frac{1}{2}, \forall a>-\frac{1}{2}$, elementul neutru;

$G_4: X_a\cdot X_b=X_{a+b+2ab}=X_{b+a+2ba}=X_b\cdot X_a,\ \forall\ X_a, X_b\in G$ ....2 puncte

b) $f:G\to\mathbf{R},\ f(X_a)=\ln(2a+1)$ este izomorfism de grupuri dacă și numai dacă:

$$\begin{cases} f \text{ este bijectiva}\begin{cases}\text{injectiva}\\ \text{surjectiva}\end{cases}\\ f \text{ este morfism}\end{cases}$$

f injectiva $\Leftrightarrow\ \forall\ X_a, X_b \in G,\ X_a \neq X_b \Rightarrow f(X_a) \neq f(X_b)$

Presup. $f(X_a) = f(X_b) \Leftrightarrow \ln(2a+1) = \ln(2b+1) \Leftrightarrow \ln\frac{2a+1}{2b+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2a+1}{2b+1} = e^0 = 1 \Rightarrow a = b$

Dar $X_a \neq X_b \Rightarrow a \neq b$, deci contrad., f este injectivă (1)

f este surjectivă $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbf{R},\ \exists\ X_a \in G$ astfel încât $f(X_a) = t$;

conform definiției $f(X_a) = \ln(2a+1) \Rightarrow \ln(2a+1) = t \Leftrightarrow 2a+1 = e^t \Rightarrow$

$a = \frac{e^t - 1}{2} > -\frac{1}{2}$ (dem.) $\Rightarrow \exists\ X_a = X_{\frac{e^t-1}{2}} \in G$, deci f este surjectivă (2)

f este morfism $\Leftrightarrow f(X_a \cdot X_b) = f(X_a) + f(X_b),\ \forall\ X_a, X_b \in G$:

$f(X_a \cdot X_b) = f(X_{a+b+2ab}) = \ln(2(a+b+2ab)+1) = \ln(2a+1)(2b+1) = \ln(2a+1) + \ln(2b+1) =$

$f(X_a) + f(X_b)$ .... 2 puncte

c) $f((X_{a_1} \cdot X_{a_2}) \cdot X_{a_3}) = f(X_{a_1} \cdot X_{a_2}) + f(X_{a_3}) = \ln(2a_1+1)(2a_2+1)(2a_3+1)$

Se demonstrează prin metoda inducției matematice că

$f(X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdot ... \cdot X_{a_n}) = \ln(2a_1+1)(2a_2+1)...(2a_n+1),\ \forall\ n \in \mathbf{N}^*$

Aplicăm problemei:

$f\left(\prod_{k=1}^{n} X_{\frac{2k-1}{2}}\right) = \ln\prod_{k=1}^{n}\left(2\frac{2k-1}{2} + 1\right) = \ln\prod_{k=1}^{n} 2k = \ln(2^n \cdot n!)$ (3)

Fie $\prod_{k=1}^{n} X_{\frac{2k-1}{2}} = X_a$, atunci $f\left(\prod_{k=1}^{n} X_{\frac{2k-1}{2}}\right) = f(X_a) = \ln(2a+1)$ (4)

din (3) și (4) rezultă $\ln(2a+1) = \ln(2^n \cdot n!) \Rightarrow 2a+1 = 2^n \cdot n! \Rightarrow a = \frac{2^n \cdot n! - 1}{2} > -\frac{1}{2}$

Deci $\prod_{k=1}^{n} X_{\frac{2k-1}{2}} = X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdot ... \cdot X_{\frac{2n-1}{2}} = X_{\frac{2^n \cdot n! - 1}{2}}, n \in \mathbf{N}^*$. .... 2 puncte

Subiectul 2

Fie G un grup multiplicativ cu proprietățile:

$$(xy)^3 = x^3y^3, (xy)^4 = x^4y^4, (xy)^5 = x^5y^5, \forall x, y \in G.$$

Să se arate că grupul G este comutativ.

Barem de corectare:

Ținând cont de egalitățile din enunț, avem:

$x^4y^4 = (xy)^4 = (xy)^3 xy = x^3y^3xy \Rightarrow xy^3 = y^3x$

Deci x comută cu y^3 și, ca urmare, x comută cu orice putere întreagă a lui y^3

$. \Rightarrow xy^{3n} = y^{3n}x, \forall n \in$ □ ....$2p$

Analog obținem $x^5y^5 = (xy)^5 = (xy)^4 xy = x^4y^4xy$.

De unde $xy^4 = y^4x \Rightarrow xy^{4k} = y^{4k}x, \forall k \in$ □ ....$2p$

Numerele 3 și 4 sunt prime între ele $\Rightarrow \exists n,k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $3n+4k=1$......................$1p$

Putem scrie: $xy = xy^{3n+4k} = \left(xy^{3n}\right)y^{4k} = \left(y^{3n}x\right)y^{4k} = y^{4k}\left(y^{3n}x\right) = y^{3n+4k}x = yx$.............$2p$

Deci grupul G este comutativ.

Subiectul 3

(3p) a) Calculați $\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}dx,\ \ x \in (0,\infty)$.

(4p) b) Determinați primitivele funcției $f:(-1,\infty)\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2-x^5}{1+x^9}$

Barem de corectare:

a) Determinăm numerele reale a,b astfel încât

$e^x+\cos x$ = a $(e^x+\cos x+\sin x)$ + b $(e^x+\cos x+\sin x)'$ $(\forall)x \in (0,\infty)$ 1p

$\Leftrightarrow e^x+\cos x$ = a $(e^x+\cos x+\sin x)$ + b $(\ e^x-\sin x+\cos x\ )$ $(\forall)x \in (0,\infty)$

$\Leftrightarrow e^x+\cos x$ = (a + b) e^x+ (a+b) $\cos x$ + (a−b) $\sin x$ $(\forall)x \in (0,\infty)$

Folosind metoda identificării coeficienților, obținem:

$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=0 \end{cases} \Longrightarrow$ a = b = $\frac{1}{2}$ 1p

$\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\cos x+\sin x}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(e^x+\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}\,(e^x+\cos x+\sin x)'}{e^x+\cos x+\sin x}dx =$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(e^x+\cos x+\sin x) + C$ 1p

b) Fie $F:(-1,\infty)\to R$ $F(x)=\int \frac{x^2-x^5}{1+x^9}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2(1-x^3)}{\left(x^3\right)^3+1}dx$ ………………………...1p

Notăm $u=x^3$, $du=3x^2dx$. Cum $x>-1 \Rightarrow u>-1$.

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}\int \frac{1-u}{u^3+1}du$ ……………………………………………….....1 p

$\frac{1-u}{u^3+1}=\frac{A}{u+1}+\frac{Bu+C}{u^2-u+1} \quad \Big| \cdot (u^3+1)$

$\Rightarrow 1-u = A(u^2-u+1)+(Bu+C)(u+1) \qquad \Rightarrow 1-u=u^2(A+B)+u(-A+B+C)+A+C$

$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=-1 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B=-\frac{2}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}\int \frac{1}{1+u}du-\frac{1}{3}\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}du\right]$ **….**1p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail:secretariat@isjsalaj.ro

$$=\frac{2}{9}\ln|u+1|-\frac{1}{9}\ln|u^2-u+1|+c=\frac{2}{9}\ln(x^3+1)-\frac{1}{9}\ln(x^6-x^3+1)+c$$

$\Rightarrow$Primitivele funcției f sunt : $F:(-1,\infty)\to R \quad F(x)=\frac{2}{9}\ln(x^3+1)-\frac{1}{9}\ln(x^6-x^3+1)+c$ ......1 p

Subiectul 4

Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Barem de corectare:

$\int \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx=\int x'\operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\int\frac{x}{x^2+1}dx=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{1}{2}ln(x^2+1)+C_1.$ ....2 p

Presupunem că f admite primitive pe $\mathbb{R}$. Atunci o astfel de primitivă arată de forma

$F(x)=\begin{cases}x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{1}{2}ln(x^2+1)+C_1, & x<0\\ x+C_2, & x\geq 0\end{cases}$ 1p

Deoarece F este o primitivă lui f atunci F este o funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$, deci F este continuă pe $\mathbb{R}$. Din continuitatea funcției F în punctul $x=0$ obținem că $C_1=C_2=C$. 1p

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\frac{1}{2}ln(x^2+1)}{x}=-\frac{\pi}{2}$ 2p

Din derivabilitatea funcției F în punctul $x=0$ obținem că $-\frac{\pi}{2}=1$ contradicție. Deci funcția f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$ ....1 p