

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 27.02.2016
Clasa a XI-a

1. (7p) Aflați numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, știind că $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (\sqrt{ax^2 + 2x + 3} - bx - c) = -1$.

2. Se consideră numerele reale a, b, c distincte două câte două și următorul sistem de ecuații în mulțimea numerelor reale:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = 1 \\ a^3x + b^3y + c^3z = 1 \end{cases}.$$

(3p) a) Arătați că sistemul are o soluție unică dacă și numai dacă $a + b + c \neq 0$.

(4p) b) Rezolvați sistemul în cazul $a + b + c = 0$. Discuție.

3. (7p) Se consideră șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $x_0 \geq 0$, $a \in (0, 1)$ și $x_{n+1} = ax_n e^{-x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln(1 + n^3).$$

GM10/2015

4. (2p) a) Dați un exemplu de matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$, astfel încât $A \neq O_3$, $A^2 \neq O_3$ și $A^3 = O_3$.

(5p) b) Dacă matricea $B \in M_3(\mathbb{R})$ are proprietatea $B^6 = O_3$, arătați că matricele $B - I_3$ și $B^2 + B + I_3$ sunt inversabile. (Cu O_3 s-a notat matricea nulă și cu I_3 matricea unitate din $M_3(\mathbb{R})$.)

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.