



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală, Iași

14.02.2014

CLASA a VI-a BAREM

Problema 1.

a)	Folosește $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$		1p
	Obține $a = \frac{1006}{1007}$		1p
	Folosește $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n+1)$		1p
	Obține $b = \frac{1006}{1007}$		1p
b)	Scrie $c = \frac{1}{2^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{1007^2}\right)$		1p
	Observă că $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{1007^2} < 1 + a$		1p
	Finalizare		1p
TOTAL PROBLEMA 1			7p

Problema 2.

a)	$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6$ deci 6 este număr perfect		2p
	$D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$, $S(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28$ deci 28 este număr perfect		2p
b)	Divizorii numărului $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ sunt 1, 2, 2^2 , 2^3 , ... 2^{k-1} , $2^k - 1$, $2 \cdot (2^k - 1)$, $2^2 \cdot (2^k - 1)$, $2^3 \cdot (2^k - 1)$, ... $2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$		1p
	Suma divizorilor numărului n este $S(n) = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{k-1}) + (2^k - 1) \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{k-1})$ $= (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{k-1}) \cdot 2^k = (2^k - 1) \cdot 2^k$		1p
	$S(n) = 2 \cdot 2^{k-1} \cdot (2^k - 1) = 2 \cdot n$, deci n este un număr perfect		1p
TOTAL PROBLEMA 2			7p



Problema 3.

Unghiurile nu pot fi adiacente		2p
Dacă $2a$ măsura unghiului mai mare și $2b$ măsura unghiului mai mic, $2a+2b=180^\circ$		1p
Măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor este $a-b=60^\circ$		2p
Obține măsurile unghiurilor de 150° și de 30°		2p
TOTAL PROBLEMA 3		7p

Problema 4.

a)	Dacă $OA=a$, atunci $AB=BC=a$, $CD=2a$, $DE=3a$, $EF=5a$		2p
	Cum $OC=DE=3a$, rezultă că $[OE]$ și $[CD]$ au același mijloc		2p
b)	Calculează $\frac{AC}{BE} = \frac{2a}{6a} = \frac{1}{3}$, $\frac{BC}{CD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, $\frac{AB}{AD} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$		
	$\frac{BF}{AF} = \frac{11a}{12a} = \frac{11}{12}$		2p
	$\frac{AC}{BE} + \frac{BC}{CD} + \frac{AB}{AD} > \frac{BF}{AF} \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{11}{12} \Leftrightarrow \frac{13}{12} > \frac{11}{12}$ adevărat		1p
TOTAL PROBLEMA 4			7p