

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, județul Timiș
23.02.2018

Clasa a IX-a
Barem de corectare și notare

1. Să se demonstreze inegalitățile:

a. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz, (\forall) x, y, z \in \mathbf{R}.$

b. $x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z), (\forall) x, y, z \in \mathbf{R}.$

Soluție:

- a. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$ 2p
 $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0$ 1p
 b. folosește punctul anterior pentru $x \rightarrow x^2, y \rightarrow y^2, z \rightarrow z^2$ 1p
 obține $x^4 + y^4 + z^4 \geq (xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2$ 1p
 folosește punctul anterior pentru $x \rightarrow xy, y \rightarrow yz, z \rightarrow xz$ 1p
 obține $(xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 \geq xyz(x + y + z)$ 1p

2. a. Să se calculeze suma:

$$[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + \dots + [\sqrt{n \cdot (n + 1)}], n \in \mathbf{N}^*.$$

b. Să se rezolve ecuația:

$$[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}.$$

Soluție:

- 2 a. $k < \sqrt{k(k + 1)} < k + 1$ 1p
 $[\sqrt{k(k + 1)}] = k$ 1p
 $[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + \dots + [\sqrt{n \cdot (n + 1)}] = \frac{n(n + 1)}{2}$ 1p
 2 b. $x \notin [0, 1], x \notin \mathbf{Z}, x > 1$ justificare 1p
 obține $([x] - \{x\}) \left(1 - \frac{1}{[x]\{x\}}\right) = 0$ 1p
 $[x] \neq \{x\}, [x]\{x\} = 1$ 1p
 $[x] > 0 \Rightarrow x > 0, [x] = n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}, \{x\} = \frac{1}{n}$, atunci $x = n + \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ 1p

3. a. Arătați că $7 \cdot 25^n + 2 \cdot 6^{n+1}$ se divide cu 19 pentru orice număr natural n .

b. Arătați că $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ pentru orice număr natural nenul n .

Soluție:

3a. Se aplica metoda inducției matematice

Verificare 1p

$P(k) \rightarrow P(k+1)$ 2p

3 b. $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1) \cdot k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, pentru orice $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$ 2p

Se insumeaza pentru k de la 1 la n si se obtine relatia dorita.....2p

4. Fie triunghiul ABC având dimensiunile $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 6$. Notăm cu **I** centrul cercului înscris triunghiului, cu **G** centrul de greutate, cu E și F punctele de intersecție ale dreptei GI cu AB și respectiv AC, și cu T punctul de intersecție dintre dreptele AI și BC. Calculați:

a. $\vec{AT}$ în funcție de $\vec{AC}$ și $\vec{BC}$;

b. $\vec{GI}$ în funcție de $\vec{GA}$ și $\vec{GB}$;

c. $\frac{AE}{EB}$ și $\frac{AF}{FB}$.

Soluție:

4 a. $\vec{AT} = \vec{AC} - \frac{7}{12}\vec{BC}$2p

4 b. Scrie relatia $\vec{OG} = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})/3$, $\forall O \in P$1p

si relatia $\vec{OI} = (6\vec{OA} + 7\vec{OB} + 5\vec{OC})/18$, $\forall O \in P$ 1p

punem G în locul lui O în relatia a 2-a si obtinem:

$\vec{GI} = (\vec{GA} + 2\vec{GB})/18$1p

4 c. Calculul rapoartelor (folosind Teorema bisectoarei sau relatiile de la subpunctul b)

obtinem : $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FB} = 2$2p