

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ ,

CLASA a XII - a

22 FEBRUARIE 2014

1. Demonstrați că $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1} dx \leq \sqrt{\frac{2016}{2015}}.$

2. Calculați $\int \frac{\cos 2014x}{\sin x} dx.$

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu 2014 elemente și cu proprietatea că $f: G \rightarrow G, f(x) = x^4$ morfism de grupuri. Arătați că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

4. Pe $\mathbb{R}$ definim legea $x * y = 5xy + 5(x + y) + 4, x, y \in \mathbb{R}.$

a) $(\mathbb{R}, *)$ este grup?

b) Calculați $(-2014) * (-2013) * \dots * 2013 * 2014;$

c) Determinați ultimele 2006 cifre ale numărului $1 * 2 * \dots * 2014.$

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte

Timp de lucru 3 ore

BAREM XII

1. Demonstrați că $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1} dx \leq \sqrt{\frac{2016}{2015}}.$

Soluție. $I = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1} dx = \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1} dx + \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+(-x)^{2014}}}{2015^{-x}+1} dx +$
 $+ \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^{2014}}}{2015^x+1} dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^{2014}} dx \dots\dots\dots 4 \text{ puncte}$

Din inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz $\Rightarrow (\int_0^1 \sqrt{1+x^{2014}} dx)^2 \leq$
 $\int_0^1 1^2 dx \cdot \int_0^1 (1+x^{2014})dx = \frac{2016}{2015} \Rightarrow I \leq \sqrt{\frac{2016}{2015}} \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$

2. Calculați $\int \frac{\cos 2014x}{\sin x} dx.$

Soluție. Fie $F_n = \int \frac{\cos nx}{\sin x} dx, n \in \mathbb{N}, x \in I \subset \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$F_{n+2} - F_n = \int \frac{\cos (n+2)x - \cos nx}{\sin x} dx = \int 2 \sin (n+1)x dx = \frac{2}{n+1} \cos (n+1)x + C$
 $\dots\dots\dots 4 \text{ puncte}$

$$F_0 = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$F_{2014} = \frac{2}{2013} \cos 2013x + \frac{2}{2011} \cos 2011x + \dots + 2 \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$
 $\dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu 2014 elemente și cu proprietatea că $f: G \rightarrow G, f(x) = x^4$ este morfism de grupuri. Arătați că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

Soluție. $f: G \rightarrow G, f(x) = x^4$ este morfism de grupuri $\Rightarrow$

$x^4 y^4 = (xy)^4 \Rightarrow x^3 y^3 = (yx)^3, \forall x, y \in G \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

$y^4 x^4 = (yx)^4 = (yx)(yx)^3 = yx x^3 y^3 = yx^4 y^3 \Rightarrow y^3 x^4 = x^4 y^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{12} y^{12} = x^8 (x^4 y^3) y^9 = x^8 y^3 x^4 y^9 = x^4 (x^4 y^3) x^4 y^9 = \dots = y^{12} x^{12}$

.....2 puncte

$$(xy)^{12} = [(xy)^4]^3 = (x^4y^4)^3 \xrightarrow{x^3y^3=(yx)^3} y^{12}x^{12} = x^{12}y^{12}$$

$$(xy)^{2016} = ((xy)^{12})^{168} = (x^{12}y^{12})^{168} = x^{2016}y^{2016} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Cum $|G| = 2014 \Rightarrow a^{2016} = a^2 \forall a \in G \Rightarrow (xy)^2 = x^2y^2 \Rightarrow (G, \cdot)$ grup
comutativ.1 punct

4. Pe $\mathbb{R}$ definim legea $x * y = 5xy + 5(x + y) + 4$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $(\mathbb{R}, *)$ este grup?

b) Calculați $(-2014) * (-2013) * \dots * 2013 * 2014$;

c) Determinați ultimele 2006 cifre ale numărului $1 * 2 * \dots * 2014$.

Soluție.

a) $x * y = 5(x + 1)(y + 1) - 1$ asociativă, comutativă, $e = -\frac{4}{5}$, $U(\mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{-1\}$.
.....2 puncte

b) $x * (-1) = -1 \Rightarrow (-2014) * (-2013) * \dots * 2013 * 2014 = -1$
.....2 puncte

c) $1 * 2 * \dots * 2014 = \underbrace{5^{2013} 2015!}_{:10^{2005}} - 1 \Rightarrow 1 * 2 * \dots * 2014$ se termină în 2005 cifre de 9
precedate de cifra 4
.....3 puncte