

# Olimpiada Națională de Matematică - Etapa locală

## Clasa a X – a

### VARIANTA 1

#### BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

1. Dacă  $x \leq 0$ , atunci  $1 + 2^{\lceil 3x \rceil} > 1 \geq 3^{\lfloor 2x \rfloor}$ , deci nu sunt soluții  $x \leq 0$ .-----1p

Dacă  $x > 0$ , atunci notăm  $\lceil 3x \rceil = a \in \mathbb{N}$  și  $\lfloor 2x \rfloor = b \in \mathbb{N}$ .

Ecuția devine  $1 + 2^a = 3^b$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ .-----1p

Observăm că  $a = 0$  nu este soluție, iar dacă  $a = 1$ , atunci  $b = 1$ .-----1p

Fie  $a \geq 2$ . Pentru  $b$  impar,  $3^b = (\mathcal{M}_4 - 1)^b = \mathcal{M}_4 - 1$ . Rezulta  $2^a = \mathcal{M}_4 + 2$ ,

fals pentru  $a \geq 2$ , deci  $b$  este număr par,  $b = 2c$ ,  $c \in \mathbb{N}$ .-----1p

Ecuția se scrie

$$2^a = 3^{2c} - 1 = (3^c - 1)(3^c + 1) \text{ și, de aici, } 3^c - 1 = 2^\alpha,$$

$$3^c + 1 = 2^\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \alpha < \beta. \text{ Deducem că } 2^\beta - 2^\alpha = 2 \Rightarrow 2^\alpha(2^{\beta-\alpha} - 1) = 2, \text{ deci } \alpha = 1, \beta = 2.$$

Astfel am găsit  $c=1, b=2$  și  $a=3$ .-----2p

În final soluția este  $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[1, \frac{4}{3}\right)$ .-----1p

2. Avem

$$\log_{ab}(a+b) \geq \frac{1}{2} \log_{ab}(a+b)^2 \geq \frac{1}{2} \log_{ab} 4ab = \frac{1}{2} + \log_{ab} 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{deci } \sum \log_{ab}(a+b) \geq 2 + \sum \frac{1}{\log_2 a + \log_2 b} \geq 2 + \frac{16}{\sum (\log_2 a + \log_2 b)} \dots\dots\dots 3p$$

$$\sum \log_{ab}(a+b) \geq 2 + \frac{16}{2 \log_2 (abcd)} = 2 + \frac{16}{2 \log_2 16} = 2 + \frac{16}{8} = 4 \dots\dots\dots 2p$$

3. Folosim:

Dacă  $a, b > 0$  avem  $(a+b)^3 \geq 4ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$ , cu egalitate pentru  $a = b$ .

-----2 puncte

Obținem:

$$\sum \frac{1}{(a^x + b^x)^3 + 4} \leq \sum \frac{1}{4a^x b^x (a^x + b^x) + 4} = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{(a^x + b^x) \frac{1}{c^x} + 1} = \frac{1}{4} \sum \frac{c^x}{a^x + b^x + c^x} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

-----3 puncte

Egalitatea are loc dacă și numai dacă  $a = b = c = 1$  sau dacă  $x = 0$ .

Concluzie:

Dacă  $a = b = c = 1$ , atunci orice  $x \in \mathbb{R}$  este soluție pentru ecuație.

-----1 punct

Dacă cel puțin unul dintre numerele  $a, b, c$  este diferit de 1, atunci  $x = 0$  este soluția unică a ecuației.

-----1 punct

#### 4. Varianta 1

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = -i, \quad z_N = \frac{z_C + z_D}{2} = 1 + 2i, \dots\dots\dots (1 \text{ p})$$

A, D, P coliniare, există  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $z_P = \alpha \cdot z_A + (1 - \alpha) \cdot z_D$ ,  
rezultă  $z_P = -3\alpha - 1 + (3 - 2\alpha)i$ , (1)  $\dots\dots\dots (2 \text{ p})$

B, C, P coliniare, există  $\beta \in \mathbb{R}$  astfel încât  $z_P = \beta \cdot z_B + (1 - \beta) \cdot z_C$ ,  
rezultă  $z_P = \beta + 3 + (1 - 4\beta)i$ , (2)  $\dots\dots\dots (2 \text{ p})$

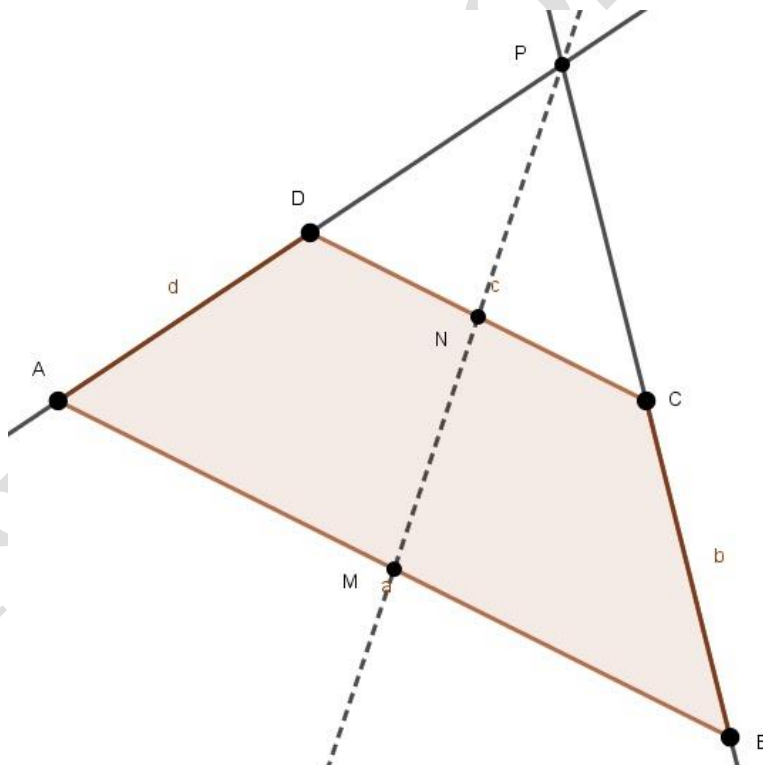
Din (1) și (2) obținem  $\alpha = \beta = -1$ ,  $z_P = 2 + 5i$ ,  $\dots\dots\dots (1 \text{ p})$

$$\frac{z_P - z_M}{z_P - z_N} = 2 \in \mathbb{R}, \text{ rezultă } M, N, P \text{ sunt coliniare. } \dots\dots\dots (1 \text{ p})$$

#### Varianta 2

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} = -2 \in \mathbb{R}, \text{ rezultă } AB \parallel CD, AB \neq CD, ABCD \text{ este trapez, } \dots\dots\dots (4 \text{ p})$$

Într-un trapez, mijloacele bazelor și punctul de intersecție al laturilor neparalele sunt coliniare.  
 $\dots\dots\dots (3 \text{ p})$



#### Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.  
Se acordă numai punctaje întregi.