

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa a VIII-a

Problema 1.

a) Să se arate că $\sqrt{20172018^2 + 40344037} \in \mathbb{N}$.

b) Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $a^2 - b^2 = 3ab$. Să se arate că

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{6b}{a} - \frac{6a}{b} + 23} \text{ este număr natural pătrat perfect}$$

c) Să se arate că $\sqrt{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)+1}$ este număr natural impar oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2.

Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ în care $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{BC'} = \frac{CC'}{CD'}$.

Dacă distanța dintre dreptele AB' și CD' este egală cu 8cm, atunci să se calculeze aria triunghiului ACD' .

Problema 3.

Fie numerele reale $x, y, z \geq 1$ astfel încât $x + y + z = 6$. Arătați că

$$\frac{x^2+3}{3x^2+1} + \frac{y^2+3}{3y^2+1} + \frac{z^2+3}{3z^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

Gazeta matematică

Problema 4.

Triunghiul ABC are $AB = AC = 6$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$ cm și O este centrul cercului circumscris acestui triunghi. Pe planul triunghiului ABC se construiesc perpendicularele AM și ON astfel încât $ON = AM = 8$ cm. Să se demonstreze că $\frac{d(M, BC) + d(N, BC)}{MN} \geq 1$.

Notă: Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa a VI-a

Problema 1.

Determinați numerele naturale nenule a, b, x, y astfel încât $(a, b) = 2^{x+y}$ și $a + b = 12$. Am notat cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

Gazeta matematică

Problema 2.

Arătați că fracția $\frac{2018^{2018} - 2018^{2017} - 2018^{2016}}{2017^{2018} - 2017^{2017} - 2017^{2016} - 1}$ este reductibilă.

Problema 3.

Fie unghiul ascuțit $\sphericalangle AOB$ și semidreapta $[OC$ opusă semidreptei $[OA$. Știind că în semiplanul determinat de dreapta OA și în care se află semidreapta $[OB$, se duc $OM \perp OA$ și $ON \perp OB$ și că măsura $\sphericalangle AOB$ este o treime din măsura $\sphericalangle NOC$, iar $[OP$ este bisectoarea $\sphericalangle AON$, se cere:

- Aflați măsura unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COP$;
- Demonstrați că $[OP$ este bisectoarea $\sphericalangle BOM$.

Problema 4.

Fie C și D două puncte situate de o parte și de alta a segmentului $[AB]$ astfel încât $[AC] \equiv [BC]$ și $[AD] \equiv [BD]$. Dacă $DA \cap BC = \{M\}$ și $DB \cap AC = \{N\}$ demonstrați că:

- $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle NBC$;
- $[AM] \equiv [BN]$.

Notă: Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa aVII-a

Problema 1.

Fie numerele $a, b, c, d \in \mathbf{R}_+$ astfel încât $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$. Să se demonstreze că $E \in \mathbf{N}$ unde

$$E = \frac{2018+a}{1+a+ab+abc} + \frac{2018+b}{1+b+bc+bcd} + \frac{2018+c}{1+c+cd+cda} + \frac{2018+d}{1+d+da+dab}$$

Problema 2.

a) Să se determine numărul natural $\overline{ab}$, scris în sistemul de numerație zecimal, dacă

$$\sqrt{aabb} = \overline{aab} - b - a.$$

b) Fie $E_n = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$. Să se determine $n \leq 15$ pentru care $E_n \in \mathbf{Q}$.

Problema 3.

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic isoscel cu baza BC. Perpendicularele în A pe AB, respectiv AC intersectează dreapta BC în E respectiv în F. Dacă $EN \perp AC, N \in AC$, $FM \perp AB, M \in AB$ și $EN \cap FM = \{P\}$, demonstrați că:

a) AEPM și ABPC sunt rombur.

b) MNST este dreptunghi, unde $\{T\} = PB \cap AF$ și $\{S\} = PC \cap AE$.

Gazeta matematică

Problema 4.

Printr-un punct variabil D situat pe latura BC a triunghiului oarecare ABC, se duce paralela la mediana AM, $M \in (BC)$, care intersectează dreptele AB și AC, în E și respectiv F. Arătați că:

a) $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$;

b) DE + DF este constantă.

Notă: Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 17 februarie 2018
Clasa aV-a

Problema 1. Se dau numerele:

$$a = \left[2 + 2^2 \cdot 2^{24} + 2^{95} : 2^{14} + 2 \cdot (3^2)^{25} \right] : (1 + 2^{25} + 2^{80} + 3^{50}) \cdot 1^{300} - 2 + 3^{16}$$

$$b = 2^{70} - \left\{ 2^3 \cdot 1111_{(2)} - 5 \cdot \left[5 - (10^4 - 9375) : 5^3 \right] : 9^{1994} - 26 \cdot 2^2 \right\} \cdot 2^{65}$$

- a) Arătați că **a** este pătrat perfect și **b** nu este pătrat perfect;
b) Comparați numerele date.

Problema 2.

Într-o școală, numărul elevilor de clasa a V-a, este cuprins între cel mai mic număr natural de trei cifre distincte și cel mai mic număr natural de trei cifre identice. Un sfert dintre aceștia participă la corul școlii și a noua parte dintre elevi frecventează cercul de matematică.

Câți elevi de clasa a V-a sunt în școală?

Problema 3.

Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ știind că prin împărțire la $\overline{bc}$, obținem câtul nenul c și restul 0.

Gazeta matematică

Problema 4.

- a) Scrieți numărul 289 ca sumă de 3 pătrate perfecte.
b) Arătați că $8^{2018} + 9^{2018} + 12^{2018} < 289^{2018}$.

Notă: Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.