

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ****ETAPA LOCALĂ – 25 FEBRUARIE 2023****BAREM clasa a V-a****Problema 1.**

- a) O familie formată din mama, tata, doi băieți gemeni și o fiică cu trei ani mai mare decât gemenii, plătește pentru o vacanță la munte 4860 de lei. Costul s-a calculat astfel: 1350 lei pentru un adult și suma vârstelor copiilor a fost înmulțită cu 90 de lei. Care este vârsta unui băiat?
- b) Diana și Mihai aveau împreună 195 lei. După ce fiecare și-a plătit biletul de intrare la film Diana mai are 82 lei, iar Mihai mai are 63 lei. Ce sumă a avut Diana inițial?

Soluție :

- a) Costul vacanței pentru adulți este $1350 \cdot 2 = 2700$ lei.....1p
Costul vacanței pentru cei trei copii= $4860-2700=2160$ lei1p
suma vârstelor copiilor= $2160:90=24$ ani.....1p
vârsta unui băiat este de 7 ani.....1p
- b) Prețul unui bilet la film este de 25 lei.....2p
Diana a avut 107 lei.....1p

Problema 2.

Aflați numerele naturale nenule care prin împărțire la 17 dau restul un pătrat perfect de două ori mai mic decât câtul.

Soluție:

- $x: 17 = c \text{ rest } r$ Din teorema împărțirii cu rest, rezultă $x = 17c + r; 0 \leq r < 17$2p
 $c = 2r$, deci $x = 17 \cdot 2r + r = 35 \cdot r$2p
 r este pătrat perfect $\Rightarrow r$ poate fi 1, 4, 9 sau 162p
 x poate fi: 35, 140, 315, 5601p

Problema 3.

Considerăm următorul joc: avem un triunghi și numerele naturale 1, 2, 3.

Pasul 1: în fiecare vârf al triunghiului se scrie unul din numerele date.

Pasul 2: fiecare număr aflat în unul din vârfurile triunghiului se înlocuiește cu suma celorlalte două.

Pasul 3: se repetă acțiunea de la pasul 2.

- a) Continuând în același fel, determinați numerele aflate în vârfurile triunghiului la pasul 4.
b) Continuând în același fel, determinați suma numerelor aflate în vârfurile triunghiului la pasul 2022.

**Soluție:**

- a) Pasul I: 1, 2, 3
 Pasul II: 3, 4, 51p
 Pasul III: 7, 8, 91p
 Pasul IV: 15, 16, 17.....1p

- b) La fiecare pas suma va fi dublul celei anterioare deoarece fiecare număr se înlocuiește cu suma celorlalte două.1p

Dacă la pasul k numerele sunt $a, a+1, a+2$ (cu suma $3a+3$) atunci la pasul $k+1$ numerele sunt $2a+1, 2a+2, 2a+3$ (cu suma $6a+6$).1p

$$S_1 = 6, S_2 = 12, S_3 = 24, \dots, S_n = 2 \cdot S_{n-1} \dots 1p$$

De aici, $S_n = 2^{n-1} \cdot S_1$, deci, $S_{2022} = 2^{2021} \cdot 6 = 2^{2022} \cdot 3 \dots 1p$

Problema 4.

Se consideră numerele naturale $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$.

Demonstrați că numărul $A = (a_1 + a_2) \cdot (a_2 + a_3) \cdot (a_3 + a_4) \cdot \dots \cdot (a_{2023} + a_1)$ este par.

Soluție:

Presupunem că produsul $(a_1 + a_2) \cdot (a_2 + a_3) \cdot (a_3 + a_4) \cdot \dots \cdot (a_{2023} + a_1)$ este un număr natural impar. Rezultă că fiecare factor al produsului este un număr natural impar.....4p

Însumând parantezele produsului obținem o sumă de 2023 termeni impari, care este un număr natural impar.

Se ajunge la $2 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023}) = \text{impar}$, ceea ce este o contradicție.

Presupunerea făcută este falsă, deci produsul $(a_1 + a_2) \cdot (a_2 + a_3) \cdot (a_3 + a_4) \cdot \dots \cdot (a_{2023} + a_1)$ este un număr natural nenul par.....3p