

Etapa locală a Olimpiadei Naționale de Matematică
Craiova, 16 februarie 2014
Clasa a VII-a

Problema 1.

Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ numere impare. Să se arate că

$$\{x \in \mathbb{Q} | ax^2 + bx + c = 0\} = \emptyset.$$

Problema 2.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ numere reale astfel încât

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = \dots = a_n + b_n = s.$$

Să se demonstreze că

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \geq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2 - ns^2).$$

Problema 3.

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, iar A', B', C' mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Paralela dusă prin C' la BB' intersectează paralela dusă prin A la BC în A'' .

- a) Să se arate că $[C'A''] \equiv [BB']$, iar $[A''C] \equiv [AA']$.
- b) Să se deducă faptul că medianele $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ pot fi laturile unui triunghi.

Problema 4.

Fie $ABCD$ un patrulater și $\{O\} = AC \cap BD$. Arătați că dacă

$$\frac{A_{AOB}}{A_{BOC}} + \frac{A_{BOC}}{A_{COD}} + \frac{A_{COD}}{A_{AOD}} + \frac{A_{AOD}}{A_{AOB}} = 4,$$

atunci $ABCD$ este paralelogram.

(G. M. 6-7-8/2013)

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii;

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 7;

Etapă locală a Olimpiadei Naționale de Matematică
Craiova, 16 februarie 2014
Clasa a VII-a
Soluții

Problema 1.

Fie $x = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$, $q \neq 0$ (putem presupune că p și q nu sunt simultan pare).

Atunci $ax^2 + bx + c = \frac{ap^2 + bpq + cq^2}{q^2}$. Cum în fiecare din cazurile (p, q impare), (p par și q impar) și (p impar și q par) numărul $ap^2 + bpq + cq^2$ este impar, deoarece din ipoteză a, b și c sunt impare, deducem că $ax^2 + bx + c \neq 0, \forall x \in \mathbb{Q}$, de unde concluzia.

Problema 2.

Înlocuim $b_i = s - a_i, i = \overline{1, n}$ și inegalitatea este echivalentă cu

$$[a_1(s - a_1) + \dots + a_n(s - a_n)]^2 \geq (a_1^2 + \dots + a_n^2)[(s - a_1)^2 + \dots + (s - a_n)^2 - ns^2]$$

$$[(a_1 + \dots + a_n)s - (a_1^2 + \dots + a_n^2)]^2 \geq (a_1^2 + \dots + a_n^2)[ns^2 - 2s(a_1 + \dots + a_n) + (a_1^2 + \dots + a_n^2) - ns^2]$$

Notăm $x = a_1 + \dots + a_n, y = a_1^2 + \dots + a_n^2$. Inegalitatea este echivalentă cu

$$(sx - y)^2 \geq y(y - 2sx) \Leftrightarrow s^2x^2 - 2sxy + y^2 \geq y^2 - 2sxy$$

$\Leftrightarrow s^2x^2 \geq 0$ ceea ce este adevărat.

Problema 3.

a) $\triangle AC'A'' \equiv \triangle C'BB'(ULU) \Rightarrow [C'A''] \equiv [BB']$.

Deducem $AA''CA'$ paralelogram $\Rightarrow [A''C] \equiv [AA']$.

b) Triunghiul căutat este $\triangle C'A''C$ în care $[C'A''] \equiv [BB']$, iar $[A''C] \equiv [AA']$.

Problema 4.

Avem $\frac{A_{AOB}}{A_{BOC}} = \frac{AO}{OC}, \frac{A_{BOC}}{A_{COD}} = \frac{BO}{OD}, \frac{A_{COD}}{A_{AOD}} = \frac{CO}{AO}, \frac{A_{AOD}}{A_{AOB}} = \frac{DO}{OB}$.

Relația din enunț devine $\frac{AO}{OC} + \frac{BO}{OD} + \frac{CO}{AO} + \frac{DO}{OB} = 4$ (*)

Se știe că pentru orice numere reale $x, y > 0$ este adevărată relația $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, cu egalitate pentru $x = y$.

Astfel, deducem că relația (*) este adevărată pentru $AO = OC$ și $BO = OD$, ceea ce implică $ABCD$ este paralelogram.

Etapa locală a Olimpiadei Naționale de Matematică
Craiova, 16 februarie 2014
Clasa a VII-a
Barem de corectare

Problema 1.

Oficiu	1p
Alegerea lui $x = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$, $q \neq 0$	1p
$ax^2 + bx + c = \frac{ap^2 + bpq + cq^2}{q^2}$	1p
$ap^2 + bpq + cq^2$ este număr impar	3p
Concluzia $ax^2 + bx + c \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$	1p
Total	7p

Problema 2.

Oficiu	1p
Înlocuirea $b_i = s - a_i$, $i = \overline{1, n}$	2p
Notățiile $x = a_1 + \dots + a_n$, $y = a_1^2 + \dots + a_n^2$	1p
Obținerea formei echivalente a inegalității $(sx - y)^2 \geq y(y - 2sx)$	2p
Obținerea formei finale $s^2x^2 \geq 0$	1p
Total	7p

Problema 3.

Oficiu	1p
a) $\triangle AC'A'' \equiv \triangle C'BB'$	1p
$\Rightarrow [C'A''] \equiv [BB']$	0.5p
$AA''CA'$ paralelogram	2p
$\Rightarrow [A''C] \equiv [AA']$	0.5p
b) Triunghiul căutat este $\triangle C'A''C$	2p
Total	7p

Problema 4.

Oficiu	1p
$\frac{AA'OB}{ABOC} = \frac{AO}{OC}$, $\frac{ABOC}{ACOD} = \frac{BO}{OD}$, $\frac{ACOD}{AA'OD} = \frac{CO}{AO}$, $\frac{AA'OD}{AA'OB} = \frac{DO}{OB}$	2p
Relația din enunț devine $\frac{AO}{OC} + \frac{BO}{OD} + \frac{CO}{AO} + \frac{DO}{OB} = 4$	1p
Pentru orice numere reale $x, y > 0$ este adevărată relația $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, cu egalitate pentru $x = y$	1p
$AO = OC$ și $BO = OD$	1p
$ABCD$ este paralelogram	1p
Total	7p