



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapă locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a XII-a

Subiectul 1 (7 puncte)

Determinați primitiva $F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = (x + 1)^2 \cdot e^{x - \frac{1}{x}}$, cu proprietatea că $F(1) = 2024$.

Soluție și barem

$$\int (x + 1)^2 \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx = \int (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx =$$

$$= \int [x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2x] \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx = \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$= \int x^2 e^{x - \frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx + 2 \int x \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx =$$

$$= \int x^2 \left(e^{x - \frac{1}{x}}\right)' dx + 2 \int x \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$= x^2 e^{x - \frac{1}{x}} - 2 \int x \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx + 2 \int x \cdot e^{x - \frac{1}{x}} dx = x^2 e^{x - \frac{1}{x}} + C \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^2 e^{x - \frac{1}{x}} + c, F(1) = 2024 \Rightarrow c = 2023$$

$$\text{Rezultă } F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^2 \cdot e^{x - \frac{1}{x}} + 1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a XII-a

Subiectul 2 (7 puncte)

- a) Să se arate că $\forall x, y, z \in [0,1)$ avem $\{\{x + y\} + z\} = \{x + y + z\}$,
b) Pe mulțimea $G = [0,1)$ se definește legea de compoziție $x * y = \{x + y\}$,
unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real a .
Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.
c) Să se rezolve în $(G, *)$ ecuația $x * x * x = \frac{3}{4}$

Soluție și barem

- a) $\{\{x + y\} + z\} = \{x + y\} + z - [\{x + y\} + z] = x + y - [x + y] + z -$
 $-[x + y - [x + y] + z] = x + y + z - [x + y] + [x + y] - [x + y + z] =$
 $= x + y + z - [x + y + z] = \{x + y + z\}$2 puncte
- b) Dacă $x, y \in [0,1) \Rightarrow x * y = \{x + y\} \in [0,1)$ deci legea este bine definită.
 $(x * y) * z = \{(x * y) + z\} = \{\{x + y\} + z\} = \{x + y + z\} =$
 $= \{x + \{y + z\}\} = \{x + (y * z)\} = x * (y * z)$ deci legea este
asociativă.....1 punct
Legea este comutativă: $x * y = \{x + y\} = \{y + x\} = y * x \forall x, y \in G$
Elementul neutru este $0 \in [0,1)$, $x * 0 = \{x + 0\} = \{x\} = x \forall x \in G = [0,1)$
.....1 punct
 $\forall x \in G$, x este simetrizabil și simetricul lui este $x' = 1 - x$,
 $x * x' = x' * x = \{x + x'\} = \{x + 1 - x\} = \{1\} = 0$1 punct
Deci $(G, *)$ este grup abelian.
- c) $x * x * x = (x * x) * x = \{\{x + x\} + x\} = \{x + x + x\} = \{3x\} = \frac{3}{4}$
Dacă $x \in [0, \frac{1}{3}) \Rightarrow 3x \in [0,1) \Rightarrow \{3x\} = 3x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \in [0, \frac{1}{3})$.1 punct
Dacă $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \Rightarrow 3x \in [1,2) \Rightarrow \{3x\} = 3x - 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{7}{12} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
Dacă $x \in [\frac{2}{3}, 1) \Rightarrow 3x \in [2,3) \Rightarrow \{3x\} = 3x - 2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{11}{12} \in [\frac{2}{3}, 1)$
Deci $x \in \{\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}\}$1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a XII-a

Subiectul 3 (7 puncte)

Considerăm $(S_4, \cdot)$ grupul permutărilor de gradul 4.

- a) Fie H un subgrup propriu al lui S_4 . Determinați numărul maxim de elemente din H .
- b) Fie $M = \{x \in S_4 \mid x^2 = e\}$. Demonstrați că M nu este subgrup al grupului $(S_4, \cdot)$.

Soluție și barem

- a) $(S_4, \cdot)$ are $4! = 24$ elemente.....1 punct
Conform Teoremei lui Lagrange, "Ordinul subgrupului divide ordinul grupului", numărul maxim de elemente pe care-l poate avea un subgrup propriu este 12.....1 punct
Subgrupul cu 12 elemente din $(S_4, \cdot)$ este subgrupul permutărilor pare, grupul altern de gradul 4, $(A_4, \cdot)$2 puncte
- b) $M = \left\{ e, (12), (13), (14), (23), (24), (34), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$2 puncte

Dacă M este subgrup al grupului S_4 atunci $\text{card}(M) \mid 24 \Leftrightarrow 10 \mid 24$, fals,
deci M nu este subgrup al grupului S_4 1 punct



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală 10.02.2024
Județul Buzău
CLASA a XII-a

Subiectul 4 (7 puncte)

Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietatea:

$$x^2 \cdot f'(x) + xf(x) = 1, \quad \forall x > 0 \text{ și } f(1) = 0.$$

a) Arătați că f admite primitive și determinați o primitivă F , a lui f dacă $F(1) = 0$.

b) Calculați $\int_1^e \frac{F(x)}{x} dx$.

Soluție și barem

a) Relația din enunț se scrie $x f'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$, pentru $\forall x > 0 \Leftrightarrow$
 $(x \cdot f(x))' = (\ln x)'$ 2 puncte

Cum $xf(x)$ și $\ln x$ sunt derivabile pe $(0, \infty)$ rezultă $xf(x) = \ln x + c$ 1 punct

Din $f(1) = 0$ rezultă $c = 0$ și deci $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $\forall x \in (0, \infty)$ 1 punct

f este continuă pe $(0, \infty)$ deci f are primitive pe $(0, \infty)$ și $\int f(x) dx =$
 $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int (\ln x)(\ln x)' dx = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + C$, $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + c$, $F(1) = 0$,

$c = 0$, $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x$ 1 punct

b) $\int_1^e \frac{F(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^e (\ln^2 x) \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_1^e (\ln^2 x) \cdot (\ln x)' dx =$ 1 punct

$= \frac{1}{6} \cdot \ln^3 x \Big|_1^e = \frac{1}{6}$ 1 punct