

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16 februarie 2020**

**BAREM
Clasa a VI-a**

Subiectul I (7p)

Media aritmetică a cinci numere este 336. Aflați numerele știind că primele trei sunt direct proporționale cu 2, 7 și 12 și al treilea, al patrulea și al cincilea sunt invers proporționale cu numerele 3, 4 și 10.

Rezolvare

Notăm cele cinci numere cu a, b, c, d, e și avem $a + b + c + d + e = 1680$ 2p

$\frac{a}{2} = \frac{b}{7} = \frac{c}{12} = k \Rightarrow a = 2k, b = 7k, c = 12k$ 1p

$c \cdot 3 = d \cdot 4 = e \cdot 10$ și $c = 12k \Rightarrow d = 9k, e = 3,6k$ 2p

$k = 50 \Rightarrow a = 100, b = 350, c = 600, d = 450, e = 180$ 2p

Subiectul II (7p)

a) Aflați numărul elementelor mulțimilor A și B dacă:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x \leq 2020\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{2015} < x \leq 2^{2020}\}$.

b) Dacă A și B sunt două mulțimi astfel încât $\text{card}(A \cap B) = 20$, $\text{card}(A \setminus B) = 5$ și $\text{card}(B \setminus A) = 1$, determinați: $\text{card } A$, $\text{card } B$ și $\text{card}(A \cup B)$.

Rezolvare

a) $6 < x \leq 2020 \Rightarrow \text{card } A = 2020 - 6 = 2014$ 2p

$\text{card } B = 2^{2020} - 2^{2015} = 2^{2015} (2^5 - 1) = 31 \cdot 2^{2015}$ 1p

b) $\text{card}(A \cap B) = 20 \Rightarrow$ mulțimile A și B au 20 elemente comune 1p

$\text{card}(A \setminus B) = 5 \Rightarrow$ mulțimea A are 5 elemente ce nu sunt în mulțimea B 1p

$\text{card}(B \setminus A) = 1 \Rightarrow$ mulțimea B are 1 element care nu se află în A 1p

$\text{card } A = 25, \text{card } B = 21, \text{card}(A \cup B) = 26$ 1p

Subiectul III (7p)

- a) Arătați că numerele $4n + 7$ și $5n + 9$ sunt prime între ele, oricare ar fi numărul natural n .
b) Determinați numerele naturale m și n care îndeplinesc condițiile: $m \cdot n = 2700$ și $[m; n] = 180$.
(unde $[m; n]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor m și n)

Rezolvare

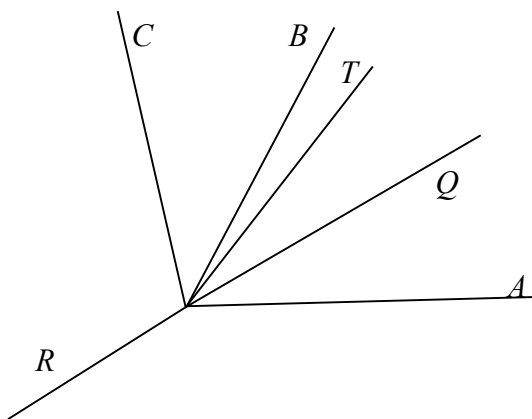
- a) Notăm $(4n + 7, 5n + 9) = d$ 1p
 $d \mid 4n + 7$ și $d \mid 5n + 9 \Rightarrow d \mid 20n + 35$ și $d \mid 20n + 36$ 1p
 $d \mid 1 \Rightarrow d = 1$ și finalizare 1p
b) Din $[m, n] \cdot (m, n) = m \cdot n \Rightarrow (m, n) = 15$ 1p
 $m = 15 \cdot a$; $n = 15 \cdot b$; $(a, b) = 1$ 1p
 $15 \cdot a \cdot 15 \cdot b = 2700 \Rightarrow a \cdot b = 12$ 1p
 $(m, n) \in \{(15; 180), (45; 60), (60; 45), (180; 15)\}$ 1p

Subiectul IV (7p)

Fie unghiurile adiacente AOB și BOC . Semidreptele OQ și OT sunt bisectoarele unghiurilor AOB , respectiv AOC . Știind că OR este semidreapta opusă semidreptei OQ , $\angle AOT = 50^\circ$ și $\angle COR = 110^\circ$, aflați măsurile unghiurilor AOB și BOC .

Gazeta matematică

Rezolvare



- $[OT \text{ este bisectoarea } \angle AOC \Rightarrow \angle AOT = \angle TOC = 50^\circ \Rightarrow \angle AOC = 100^\circ$ 1p
Realizarea figurii (cazul AOC și COR unghiuri neadiacente nu este posibil) 1p
 $\angle ROQ = 180^\circ \Rightarrow \angle TOQ = 20^\circ$ 2p
 $\angle AOQ = \angle AOT - \angle TOQ = 30^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ$ 2p
 $\angle BOC = 40^\circ$ 1p