

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 28.02.2015
Clasa a XII-a

1. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $\int_0^1 f(x)dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$ și $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(2p) a) Calculați $\int_0^1 g(x)dx$.

(5p) b) Demonstrați că există $c \in [0, 1]$ astfel încât $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq f(c) \leq 1$.

Petru Vlad

2. (7p) Fie $(G, \cdot)$ un grup și mulțimea $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}$. Demonstrați că dacă $x^2 = e$ pentru orice $x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul G este comutativ.

GM 12/2014

3. Se consideră $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a) = \int_0^{a^2} e^{|x-a|} dx$. Calculați:

(2p) a) $f(1)$.

(5p) b) $f(a)$ și $\lim_{a \searrow 0} \frac{f(a)}{a}$.

Liana Agnola

4. Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$, funcția $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, și corespondența

$(x, y) \rightarrow x * y$, unde $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in G$.

(4p) a) Arătați că această corespondență definește legea de compoziție “*” asociativă pe G .

(3p) b) Arătați că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in G$, și calculați $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \frac{1}{4} * \dots * \frac{1}{9}$.

* * *

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.