

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

30 ianuarie 2016

BAREM

CLASA A XII-A

1.)	Din oficiu	1p
	Presupunem că funcția f admite primitive de forma: $F(x) = \begin{cases} -\cos x + c_1, & x \leq 0 \\ x + \frac{x^2}{2} + c_2, & x > 0 \end{cases}$	3p
	Din F continuă în $x=0$ obținem: $-1 + c_1 = c_2$	2p
	Deci $F(x) = \begin{cases} -\cos x + c_1, & x \leq 0 \\ x + \frac{x^2}{2} + c_1 - 1, & x > 0 \end{cases}$	1p
	Din $F'_s(0) = 0$ și $F'_d(0) = 1 \Rightarrow F'_s(0) \neq F'_d(0)$, deci F nu este derivabilă în punctul $x=0$.	2p
	Contradicție, din care rezultă că funcția f nu admite primitive	1p
2.)	Din oficiu	1p
	$F(x) = \int x \sin x \cdot e^{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot e^{\cos x} dx$	1p
	Fie $I_1 = \int x \sin x \cdot e^{\cos x} dx$ și $I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot e^{\cos x} dx$	1p
	Utilizând metoda integrării prin părți obținem: $I_1 = \int x \sin x \cdot e^{\cos x} dx = \int x (-e^{\cos x})' dx = -x \cdot e^{\cos x} + \int e^{\cos x} dx$	2p
	$I_2 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot e^{\cos x} dx = \int \left(-\frac{1}{\sin x} \right)' \cdot e^{\cos x} dx = -\frac{e^{\cos x}}{\sin x} - \int e^{\cos x} dx$	2p
	Avem: $F(x) = I_1 + I_2 = -x \cdot e^{\cos x} + \int e^{\cos x} dx - \frac{e^{\cos x}}{\sin x} - \int e^{\cos x} dx = -x \cdot e^{\cos x} - \frac{e^{\cos x}}{\sin x} + C$	1p
	Din $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - 1$ obținem $C = 0$ și $F: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = -\frac{x \sin x + 1}{\sin x} e^{\cos x}$	2p
3.)	Din oficiu	1p
	Dacă e este elementul neutru al grupului $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in G$	1p
	Din $x \circ e = x$, pentru $x=0$ avem $be = 0$	1p
	Dacă $e \neq 0$ obținem $b = 0$	1p
	Dar pentru $b = 0$ avem $ax = x + ex^2$, $\forall x \in G$ ceea ce este imposibil, deci $e = 0$	2p
	Astfel pentru $e = 0$ avem $ax = x$, $\forall x \in G$ de unde $a = 1$	1p
	Din $0 \circ x = x$, $\forall x \in G$ obținem $bx = x$, $\forall x \in G$ de unde $b = 1$	1p
	Pentru $a = 1$ și $b = 1$ se verifică axiomele grupului	2p

4.)	Din oficiu	1p
	Obținem sume diferite pe anumite rânduri în funcție de c.m,m.d.c. al numărului din fața liniei și 24. Notăm cu a numărul din fața unui rând.	1p
	Dacă $(24, a) = 1$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $1 + 2 + \dots + 23 = 276$, și avem 8 astfel de rânduri: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.	1p
	Dacă $(24, a) = 2$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0 + 2 + 4 + \dots + 22) \cdot 2 = 264$, și avem 4 astfel de rânduri: 2, 10, 14, 22.	1p
	Dacă $(24, a) = 3$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0 + 3 + 6 + \dots + 21) \cdot 3 = 252$, și avem 4 astfel de rânduri: 3, 9, 15, 21.	1p
	Dacă $(24, a) = 4$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0 + 4 + 8 + 16 + 20) \cdot 4 = 240$, și avem 2 astfel de rânduri: 4 și 20.	1p
	Dacă $(24, a) = 6$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0 + 6 + 12 + 18) \cdot 6 = 216$, și avem 2 astfel de rânduri: 6 și 18.	1p
	Dacă $(24, a) = 8$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0 + 8 + 16) \cdot 8 = 192$, și avem 2 astfel de rânduri: 8 și 16.	1p
	Dacă $(24, a) = 12$, atunci suma elementelor de pe acest rând va fi $(0 + 12) \cdot 12 = 144$, și avem un singur astfel de rând: 12.	1p
	Alte posibilități nu sunt, deci $S_{24} = 8 \cdot 276 + 4 \cdot 264 + 4 \cdot 252 + 2 \cdot 240 + 2 \cdot 216 + 2 \cdot 192 + 144 = 5712$	1p