

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 24.02.2017 –

CLASA A XII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Calculați: $I = \int_0^{\pi} \frac{(x+1)\sin x}{2-\sin^2 x} dx$.

2. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care admite primitive și verifică, pentru orice număr real x , egalitatea $f(x) - F(x) = |x - 1|$, unde $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f .

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $2n + 1$ elemente cu proprietatea că există o funcție $f: G \rightarrow G$ cu proprietatea că: $f(x f(xy)) = y f(x^2)$, $\forall x, y \in G$.

Să se arate că G este grup abelian.

4. a) Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu 2015 elemente, iar e elementul său neutru. Să se arate că dacă $x \in G$ și $x^2 = e$, atunci $x = e$.

b) Fie $(G, *)$ și $(G', \circ)$ două grupuri cu 2016 respectiv 2015 elemente. Să se determine toate morfismele de grup de la G la G' .