S.S.M.R - FILIALA MURES

Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Clasa a VI-a

Subiectul I.

Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ care îndeplinesc condiția $\overline{abc} = c^3 + c^2 + c$.

Soluție

1p oficiu

$\overline{abc} = c^3 + c^2 + c \Leftrightarrow 100a + 10b + c = c^3 + c^2 + c \Leftrightarrow$ 1p

$10 \cdot (10a + b) = c^2 \cdot (c+1) \Leftrightarrow \ 10 \cdot \overline{ab} = c^2 \cdot (c+1) \Leftrightarrow$ 1p

$100 \le c^2 \cdot (c+1) < 1000 \Leftrightarrow 5 \le c < 10$ 1p

Dar, $c^2 \cdot (c+1) \vdots 10 \Rightarrow c \in \{5,9\}$

I. $c = 5 \Rightarrow 10 \cdot \overline{ab} = 150 \Rightarrow \overline{ab} = 15$ 1p

II. $c = 9 \Rightarrow 10 \cdot \overline{ab} = 810 \Rightarrow \overline{ab} = 81$ 1p

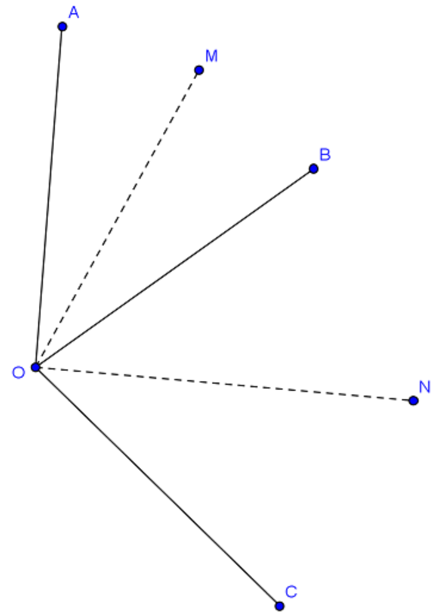
$\Rightarrow \overline{abc} \in \{155; 819\}$ 1p

Subiectul II.

Se dau unghiurile adiacente AOB și BOC. Bisectoarea unghiului AOB formează cu semidreapta [OC un unghi cu măsura de 106°10’26”, iar bisectoarele unghiurilor AOB și BOC formează un unghi cu măsura de 64°28’44”. Determinați măsurile unghiurilor AOB și BOC.

Soluție

1p oficiu



Desen **1p**

Fie [OM bisectoarea unghiului AOB şi [ON bisectoarea unghiului BOC.

$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{MOC}) = 106°10'26'' \\ m(\widehat{MON}) = 64°28'44'' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m(\widehat{NOC}) = 106°10'26'' - 64°28'44'' = 41°41'42''$ **2p**

$\Rightarrow m(\widehat{BOC}) = 2 \cdot m(\widehat{NOC}) = 2 \cdot 41°41'42'' = 83°23'24''$ **1p**

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim

$$\left.\begin{array}{r} m(M\hat{O}C)=106°10'26'' \\ m(B\hat{O}C)=83°23'24'' \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow m(M\hat{O}B)=106°10'26''-83°23'24''=22°47'2''\Rightarrow$ **1p**

$\Rightarrow m(A\hat{O}B)=2\cdot m(M\hat{O}B)=2\cdot 22°47'2''=45°34'4''$ **1p**

Subiectul III.

Determinaţi numerele naturale *x, y, z* din egalitatea $4\cdot 8^x+8\cdot 4^y+2\cdot 16^z=2592$.

(Gazeta Matematică)

Soluție

1p oficiu

$4\cdot 8^x=2^2\cdot\left(2^3\right)^x=2^2\cdot 2^{3x}=2^{3x+2}$ **1p**

$8\cdot 4^y=2^3\cdot\left(2^2\right)^y=2^3\cdot 2^{2y}=2^{2y+3}$ **1p**

$2\cdot 16^z=2\cdot\left(2^4\right)^z=2\cdot 2^{4z}=2^{4z+1}$ **1p**

$2592_{(10)}=101000100000_{(2)}$

$101000100000_{(2)}=2^{11}+2^9+2^5$

$2^{3x+2}+2^{2y+3}+2^{4z+1}=2^{11}+2^9+2^5$

Se obţin trei soluţii **1p**

I. $3x+2=11\Rightarrow x=3$
$2y+3=9\Rightarrow y=3$
$4z+1=5\Rightarrow z=1$

II. $3x+2=5\Rightarrow x=1$ **1p**
$2y+3=11\Rightarrow y=4$
$4z+1=9\Rightarrow z=2$

III. $3x+2=11\Rightarrow x=3$ **1p**
$2y+3=5\Rightarrow y=1$
$4z+1=9\Rightarrow z=2$

Subiectul IV.

a) Demonstraţi că nu există numere naturale *x*, *y*, *z* pentru care

$x+3y+5z=2012$ şi $x^2+y^2+3z^2=2013$.

(Gazeta Matematică)

b) Dacă $a=4n+3$ şi $b=3n+2$, arătaţi că cel mai mic multiplu comun al numerele *a* şi *b* este egal cu produsul lor.

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim

Soluție

1p oficiU

a) $x + 3y + 5z = 2012$ (1)

$x^2 + y^2 + 3z^2 = 2013$ (2)

Din (1) si (2) prin diferenta obtinem $x^2 - x + y^2 - 3y + 3z^2 - 5z = 1 \Leftrightarrow$

$x(x-1) + y(y-3) + z(3z-5) = 1.$ **1 punct**

Deci 2 termeni sunt nuli iar unul este = 1.

x(x-1)=par (produs de nr. consecutive). Distingem urmatoarele situatii:

I. y si z au aceeasi paritate => $y(y-3) + z(3z-5) =$ par =>

par =1 fals. **1 punct**

II. y si z au paritati diferite => $y(y-3) + z(3z-5) =$ par =>

par =1 fals. **1 punct**

b) [a, b] = ab ⇔ (a, b)=1

Fie d=(4n+3,3n+2) =>d divide 4n+3 si d divide 3n+2. ....**1 punct**

Atunci d divide orice multiplu al acestor numere adica, d divide 12n+9, respectiv d divide 12n+8 ....**1 punct**

In final d divide si diferenta lor, deci d divide pe 1, de unde avem d=1 ....**1 punct**

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim