

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17.02.2018
Clasa a IX-a

Barem de evaluare și notare

(1) (a) Numerele A, B, C sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă $2B = A + C \Leftrightarrow \frac{b}{c+a} + \frac{b}{c+a} = \frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b} \Leftrightarrow$ $\frac{b}{c+a} - \frac{a}{b+c} = \frac{c}{a+b} - \frac{b}{c+a} \Leftrightarrow \frac{(b-a)(a+b+c)}{b+c} = \frac{(c-b)(a+b+c)}{a+b}; \text{ cum } a+b+c \neq 0,$ această ultimă egalitate este echivalentă cu $2b^2 = a^2 + c^2$, concluzia fiind imediată.	(4p)
(b) Inegalitatea propusă este, sau ar trebui să fie, destul de cunoscută !; în literatura de specialitate este cunoscută sub numele de inegalitatea lui Nesbitt. $a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{z+x-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2} \Rightarrow$ Notăm $b+c=x, c+a=y, a+b=z \Rightarrow$ $A+B+C = \frac{1}{2} \left(\sum \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - 3 \right) \geq \frac{2+2+2-3}{2} = \frac{3}{2}$	(3p)
(2) Considerăm paralelogramul $ABEC$ și astfel condiția din enunț devine $\overline{AE} = \overline{CB} \Leftrightarrow$ $ABEC$ dreptunghi $\Leftrightarrow AB \perp AC$.	(4p) (3p)
(3) (a) Dacă $x \in [0,1)$ se observă că $y = \frac{x^2+4}{5} \in [0,1)$ și $y-x = \frac{(x-1)(x-4)}{5} > 0$ și deci $y > x$. Șirul definit astfel: $x_{n+1} = \frac{x_n^2+4}{5}, x_1 = x$ va fi un șir strict crescător inclus în M ceea ce ne spune că M are o infinitate de termeni și deci contradicție. Idem pentru $x \in (1,4)$ sau pentru $x \in (4,\infty)$ (b) Observă că pentru un $x < 0$ din mulțime avem și $y = \frac{x^2+4}{5} \in M, y > 0$. Identifică variantele: $M_1 = \{-1,1\}, \{-4,4\}, M_3 = \{-1,1,4\}, M_4 = \{-4,4,1\}, M_5 = \{-4,-1,1,4\},$ $M_6 = \{1\}, M_7 = \{4\}, M_8 = \{1,4\}$	(4p) (3p)
(4) (a) $x = 3 + 2\sqrt{2} \in M \Rightarrow M \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset,$ $x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2} \in M \Rightarrow xy = u + t\sqrt{2},$ cu $u = ac + 2bd, t = ad + bc \in \mathbb{Z}, u^2 - 2t^2 = 1 \Rightarrow xy \in M$	(4p)
(b) folosind (a), avem că pentru $x = 3 + 2\sqrt{2} \in M \Rightarrow x^2 \in M$ și, dacă, $x^k \in M \Rightarrow x^{k+1} \in M$; cum $x > 1 \Rightarrow x^k \neq x^p, \forall k, p \in \mathbb{N}^*, k \neq p$ și astfel $x^n \in M, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică mulțimea M este infinită.	(3p)