



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 16.02.2019

Clasa a X – a

PROBLEMA 1.

- a) Să se arate că $\frac{3}{2} < \log_2 3 < \frac{5}{3}$.
- b) Să se determine numărul natural n pentru care $n < \log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 6 + \log_6 8 < n + 1$.

PROBLEMA 2. Determinați numerele reale $a \leq 1$ și $b > 0$, pentru care ecuația

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \frac{x^2 + b + 1}{\sqrt{x^2 + b}}$$

are soluții reale.

PROBLEMA 3. Considerăm familia de funcții $f_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \Gamma$, $f_\alpha(n) = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

- a) Demonstrați că f_α nu este surjectivă, pentru nicio valoare reală a lui α ;
- b) Demonstrați că oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$, există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât imaginea funcției f_α să aibă m elemente;
- c) Demonstrați că oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, funcția f_α este sau injectivă sau periodică.

PROBLEMA 4. Considerăm triunghiul ABC cu vârfurile de afixe a, b, c , cu $|a| = |b| = |c| = R$. Înălțimea dusă din vârful A intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul D , de afix d .

- a) Exprimați d în funcție de a, b, c ;
- b) Fie mulțimea $\mathcal{R}_n = \left\{ z_k = R \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}$, unde $n \geq 5$ este impar și fie $k, j, l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ fixate, două câte două distincte, astfel încât $a = z_k$, $b = z_j$, $c = z_l$. Este posibil ca d să fie element al mulțimii $\mathcal{R}_n$? Justificați răspunsul.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.