

BAREM DE CORECTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
 ETAPA LOCALĂ - 21 februarie 2016

Clasa a XI - a

SUBIECTUL I (7p)

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = a_n \sqrt{\frac{n}{n+a_n^4}}$, $n \geq 1$. Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze limita sa.

Florin Rotaru, Focșani - GM. 11/2015.

Prin inducție se obține $a_n > 0$, $(\forall) n \geq 1$ deci șirul este mărginit inferior (1p)

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{n}{n+a_n^4}} < 1$, $(\forall) n \geq 1$ deci șirul este strict descrescător (1p)

Din teorema lui Weierstrass se obține convergența șirului cu limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \geq 0$ (1p)

Relația de recurență devine $a_{n+1}^2 = \frac{na_n^2}{n+a_n^4} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{n+a_n^4}{na_n^2} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{1}{a_n^2} + \frac{a_n^2}{n} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{a_n^2}{n}$ (1p)

Sumând relațiile anterioare $\Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}^2} = \frac{1}{a_1^2} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{k}$ și cum $a_k^2 > l^2 \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}^2} > \frac{1}{a_1^2} + l^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (1p)

Dacă prin absurd $l > 0$, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$, trecând la limită în inegalitatea anterioară deducem că

$\frac{1}{l^2} \geq \frac{1}{a_1^2} + l^2 \cdot \infty \Rightarrow \frac{1}{l^2} \geq \infty$ ceea ce este absurd (1p)

În concluzie, rămâne $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l = 0$ (1p)

SUBIECTUL II (7p)

(2p) a) Să se arate că dacă funcția $F: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este periodică și există $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = l$, atunci $l \in \mathbf{R}$ și F este constantă.

(5p) b) Determinați funcțiile $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care verifică condițiile:

i) există $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = a \in \mathbf{R}$;

ii) $f(x+2) + f(x) = 2f(x+1)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$.

a) Fie T o perioadă ($T > 0$) a funcției și presupunem prin absurd că $(\exists) x_1 \neq x_2$ cu $F(x_1) \neq F(x_2)$.

Dacă $x_n' = x_1 + nT \rightarrow \infty$, $F(x_n') = F(x_1 + nT) = F(x_1) \rightarrow F(x_1)$ iar dacă

$x_n'' = x_2 + nT \rightarrow \infty$, $F(x_n'') = F(x_2 + nT) = F(x_2) \rightarrow F(x_2)$ deci F nu are limită la ∞ , contradicție (1p)

Așadar funcția este constantă ($F(x) = c$) iar $l = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = c \in \mathbf{R}$ (1p)

b) Notăm $g(x) = f(x) - x$ și condiția ii) se scrie $g(x+2) + g(x) = 2g(x+1) \Leftrightarrow$

$g(x+2) - g(x+1) = g(x+1) - g(x) \Leftrightarrow h(x+1) = h(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ unde $h(x) = g(x+1) - g(x)$ (1p)

$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x+1) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+1) - (x+1) - (f(x) - x)] = a - a = 0$ (1p)

$h(x+1) = h(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow h$ este periodică (1p)

Ultimele două observații, utilizând a) $\Rightarrow h$ este funcție constantă și $h(x) = 0$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ (1p)

$\Rightarrow g(x+1) = g(x)$, $(\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow g$ este periodică și $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = a \Rightarrow g$ este constantă

$g(x) = a \Rightarrow f(x) = x + a$ (care verifică ipotezele) (1p)

SUBIECTUL III (7p)

Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

(1p) a) Determinați toate matricele $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ pentru care $AB = BA$;

(3p) b) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ ecuația $X^2 = A$;

(1p) c) Arătați că $A^2 = 2 \cdot 3 \cdot A - 3^2 \cdot I_2$ și $A^3 = 3 \cdot 3^2 \cdot A - 2 \cdot 3^3 \cdot I_2$;

(2p) d) Calculați A^{2016} .

a) Se caută $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și se obține $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a - 2b \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbf{R}$ (1p)

b) $X^3 = X^2 \cdot X = X \cdot X^2 \Rightarrow X^2 \cdot A = A \cdot X^2$, așadar X^2 comută cu A și (pct. a)) căutând matricea X de

forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a - 2b \end{pmatrix}$ se obține sistemul $\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ 2b^2 - 2ab = 1 \\ a^2 - 4ab + 3b^2 = 4 \end{cases}$ (1p)

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ -4b^2 + 4ab = -2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 4ab - 5b^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 4 \cdot \frac{a}{b} - 5 = 0$, etc. Se obțin soluțiile $a = \pm \frac{5}{2\sqrt{3}}$ și

$b = \mp \frac{1}{2\sqrt{3}}$ care verifică și ultima ecuație a sistemului $\Rightarrow X \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{7}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{7}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}$ (2p)

c) verificare directă (1p)

d) se arată prin inducție că $A^n = n \cdot 3^{n-1} \cdot A - (n-1) \cdot 3^n \cdot I_2 \Rightarrow A^{2016} = 2016 \cdot 3^{2015} A - 2015 \cdot 3^{2016} I_2$ (2p)

SUBIECTUL IV (7p)

(2p) a) Să se demonstreze că $(\forall) A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ cu $AB = BA$, avem $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

(5p) b) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ astfel încât $A + {}^t A = O_n$. Să se arate că $(\forall) \lambda \in \mathbf{R}$, avem $\det(I_n + \lambda A^2) \geq 0$.

a) $\det(A^2 + B^2) = \det((A + iB)(A - iB)) = \det(A + iB) \det(A - iB) = \det(A + iB) \det(\overline{A + iB}) =$
 $= \det(A + iB) \overline{\det(A + iB)} = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$ (2p)

b) Dacă $\lambda > 0$ se utilizează a): $\det(I_n + \lambda A^2) = \det\left(I_n^2 + (\sqrt{\lambda} A)^2\right) \geq 0$ (I_n și $\sqrt{\lambda} A$ comută) (1p)

Dacă $\lambda = 0$ inegalitatea este evidentă (1p)

Dacă $\lambda < 0$, fie $\lambda = -\alpha$, $\alpha > 0$ și $\det(I_n + \lambda A^2) = \det(I_n - \alpha A^2) = \det(I_n - \sqrt{\alpha} A) \cdot \det(I_n + \sqrt{\alpha} A)$ (1p)

$= \det({}^t I_n + \sqrt{\alpha} ({}^t A)) \cdot \det(I_n + \sqrt{\alpha} A) = \det({}^t (I_n + \sqrt{\alpha} A)) \cdot \det(I_n + \sqrt{\alpha} A) = \left(\det(I_n + \sqrt{\alpha} A)\right)^2 \geq 0$ (2p)