

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
Craiova, 16 februarie 2014
Clasa a XI-a

Soluții

Problema 1. Fie $a_0, a_1, \dots, a_k$ ($k \geq 1$) numere reale astfel încât $a_0 + a_1 + \dots + a_k = 0$.
Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 \sqrt[3]{n} + a_1 \sqrt[3]{n+1} + \dots + a_k \sqrt[3]{n+k})$.

Soluție. Înlocuim $a_0 = -a_1 - a_2 - \dots - a_k$ și astfel $a_0 \sqrt[3]{n} + a_1 \sqrt[3]{n+1} + \dots + a_k \sqrt[3]{n+k} =$
 $a_1(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) + \dots + a_k(\sqrt[3]{n+k} - \sqrt[3]{n})$.
Însă pentru orice $p = 1, 2, \dots, k$, $\sqrt[3]{n+p} - \sqrt[3]{n} = \frac{n+p-n}{\sqrt[3]{(n+p)^2} + \sqrt[3]{(n+p)n} + \sqrt[3]{n^2}} =$
 $= \frac{p}{\sqrt[3]{(n+p)^2} + \sqrt[3]{(n+p)n} + \sqrt[3]{n^2}} \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$.
Deci limita căutată este 0.

Problema 2. Fie a și b două numere reale pozitive, cu $a < b$.
Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{a^n + b^n} \} = \{b\}$, unde $\{ \}$ este funcția parte fracționară.

Gazeta Matematică Nr. 1/2013

Soluție. Deoarece $a < b$, atunci $b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq b \sqrt[n]{2}$ oricare ar fi $n \geq 2$ și cum
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b \sqrt[n]{2} = b$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$. Cum $b < [b] + 1$, există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât
 $\sqrt[n]{a^n + b^n} < [b] + 1$, pentru orice $n \geq n_0$.

În consecință, cum $[b] \leq b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq [b] + 1$, pentru orice $n \geq n_0$, rezultă că
 $[\sqrt[n]{a^n + b^n}] = [b]$, pentru $n \geq n_0$. Atunci:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{a^n + b^n} \} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a^n + b^n} - [\sqrt[n]{a^n + b^n}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a^n + b^n} - [b]) = b - [b] = \{b\}$.

Problema 3. Fie $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție pentru care $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ există și este finită.

Să se arate că dacă $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(\sqrt{xy})$ pentru orice $x, y > 0$, atunci f este o funcție constantă.

Soluție. Vom demonstra că $f(x) = c$, unde $c = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.

Fie $\lambda > 0$, $x > 0$ și $y = \lambda x$. Atunci din $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(\sqrt{xy}) \Rightarrow f\left(\frac{1+\lambda}{2} \cdot x\right) = f(\sqrt{\lambda} \cdot x)$
 $\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} \cdot x\right), \forall x > 0$.

Dacă $a = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$, atunci $0 < a < 1$ și $f(x) = f(ax), \forall x > 0$.

Deducem inductiv că $f(x) = f(a^n x), \forall n \geq 1$. Cum $a^n x \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a^n x) = c$.

Problema 4. Să se arate că oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, sistemul

$$\frac{1}{2}x = ax + by + cz$$

$$\frac{1}{2}y = cx + ay + bz$$

$$\frac{1}{2}z = bx + cy + az \quad \text{admite numai soluția } x = y = z = 0.$$

Soluție. Scriem sistemul sub formă matricială $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

cu $A = \begin{pmatrix} a - \frac{1}{2} & b & c \\ c & a - \frac{1}{2} & b \\ b & c & a - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ și arătăm că A este inversabilă (adică $\det(A) \neq 0$) și atunci

va rezulta că $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde $x = y = z = 0$.

Adunând ultimele două linii la prima deducem că

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a+b+c-\frac{1}{2} & a+b+c-\frac{1}{2} & a+b+c-\frac{1}{2} \\ c & a-\frac{1}{2} & b \\ b & c & a-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (a+b+c-\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a-\frac{1}{2} & b \\ b & c & a-\frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Scădem prima coloană din următoarele două și obținem

$$\det(A) = (a+b+c-\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c-\frac{1}{2} & b-c \\ b & c-b & a-b-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (a+b+c-\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} a-c-\frac{1}{2} & b-c \\ c-b & a-b-\frac{1}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c-\frac{1}{2}) \left[(a-c-\frac{1}{2})(a-b-\frac{1}{2}) + (c-b)^2 \right] =$$

$$= (a+b+c-\frac{1}{2}) \left[(a-c)(a-b) - a + (c-b)^2 + \frac{b+c}{2} + \frac{1}{4} \right].$$

Cum $a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+b+c-\frac{1}{2} \neq 0$.

Dacă $b+c = 2k$ cu $k \in \mathbb{Z}$ atunci $(a-c)(a-b) - a + (c-b)^2 + k + \frac{1}{4} \neq 0$, iar dacă $b+c = 2k+1$, atunci $(a-c)(a-b) - a + (c-b)^2 + k + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 0$.

Deci $\det(A) \neq 0$, de unde $x = y = z = 0$.

Etapa locală a Olimpiadei naționale de matematică
Craiova, 16 februarie 2014
Clasa a XI-a

Barem de corectare

Problema 1.

1. Oficiu	1p
2. $a_0 = -a_1 - a_2 - \dots - a_k$	1p
3. $\sqrt[3]{n+p} - \sqrt[3]{n} = \frac{p}{\sqrt[3]{(n+p)^2} + \sqrt[3]{(n+p)n} + \sqrt[3]{n^2}}$ pentru $p = 1, 2, \dots, k$	2p
4. $\sqrt[3]{n+p} - \sqrt[3]{n} \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$ pentru orice $p = 1, 2, \dots, k$	2p
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 \sqrt[3]{n} + a_1 \sqrt[3]{n+1} + \dots + a_k \sqrt[3]{n+k}) = 0$	1p
Total	7p

Problema 2.

1. Oficiu	1p
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$	1p
3. $b < [b] + 1$	1p
4. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt[n]{a^n + b^n} < [b] + 1, \forall n \geq n_0$	1p
5. $\forall n \geq n_0, [\sqrt[n]{a^n + b^n}] = [b]$	1p
6. $\{\sqrt[n]{a^n + b^n}\} = \sqrt[n]{a^n + b^n} - [b]$	1p
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[n]{a^n + b^n}\} = b - [b] = \{b\}$	1p
Total	7p

Problema 3.

1. Oficiu	1p
2. $y = \lambda x$, cu $\lambda > 0$, $x > 0$	2p
3. $f(x) = f(ax)$ cu $a = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda} < 1$	1p
4. $f(x) = f(a^n x)$, $\forall x > 0$ și $n \geq 1$	1p
5. $a^n x \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$	1p
6. Concluzia $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a^n x) = c$, $\forall x > 0$, cu $c = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$	1p
Total	7p

Problema 4.

1. Oficiu	1p
2. Scrierea matricială $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	2p
3. $\det(A) = (a + b + c - \frac{1}{2}) [(a - c)(a - b) - a + (c - b)^2 + \frac{b+c}{2} + \frac{1}{4}]$	1p
4. $\det(A) \neq 0$	2p
5. Concluzia $x = y = z = 0$	1p
Total	7p