



Olimpiada de Matematică - Etapa Locală
Maramureș – 23 februarie 2019
Clasa a VII - a
Barem de corectare

1.a) Efectuați $[(-0,75) : (-0,25)]^2 \cdot \left[0,1(6) - 1\frac{5}{12}\right] \cdot [-0,0(4)]$

Soluție:

$$9 \cdot \left[\frac{2}{12} - \frac{17}{12}\right] \cdot \left[-\frac{4}{90}\right] \dots\dots\dots 1p$$

$$9 \cdot \left(-\frac{15}{12}\right) \cdot \left(-\frac{4}{90}\right) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Rezultatul final este } \frac{1}{2} \dots\dots\dots 1p$$

b) Arătați că numărul

$$\frac{1010}{2019} \cdot \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2019}\right) \text{ este pătrat perfect.}$$

Soluție:

$$\frac{1010}{2019} \cdot \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2019}\right) = \frac{1010}{2019} \cdot \left(\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{2019 \cdot 2020}\right) =$$

$$\frac{1010}{2019} \cdot \frac{2 \cdot 2019}{2020} = 1 \dots\dots\dots 2p + 2p$$

2. Fie numerele raționale $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2019}$.

Dacă $\frac{1}{x_1+1} + \frac{2}{x_2+2} + \dots + \frac{2019}{x_{2019}+2019} = 2020$, calculați valoarea expresiei:

$$E = \frac{x_1}{x_1+1} + \frac{x_2}{x_2+2} + \dots + \frac{x_{2019}}{x_{2019}+2019}$$

Soluție:

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{2}{x_2+2} + \dots + \frac{2019}{x_{2019}+2019} + \frac{x_1}{x_1+1} + \frac{x_2}{x_2+2} + \dots + \frac{x_{2019}}{x_{2019}+2019} = 2019 \dots\dots\dots 3p$$

$$2020 + \frac{x_1}{x_1+1} + \frac{x_2}{x_2+2} + \dots + \frac{x_{2019}}{x_{2019}+2019} = 2019 \dots\dots\dots 3p$$

$$\frac{x_1}{x_1+1} + \frac{x_2}{x_2+2} + \dots + \frac{x_{2019}}{x_{2019}+2019} = -1 \dots\dots\dots 1p$$



3. Pe laturile $[AB]$ și $[BC]$ ale ΔABC echilateral se construiesc în exterior pătratele $ABMN$ și $BCPQ$.

4p a) Să se arate că $AQ \perp MC$;

3p b) Dacă $AQ \cap MC = \{E\}$ și $F \in AC$ astfel încât $[AF] \equiv [FC]$, să se arate că B, E și F sunt coliniare.

Soluție:

a)

În ΔBMC : $m(\angle BMC) = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$; în ΔBQA : $m(\angle BQA) = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$
....1p

$m(\angle MBQ) = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 1p

În ΔBQM : $m(\angle BMQ) = m(\angle BQM) = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$
.....1p

În ΔEMQ : $m(\angle EMQ) = m(\angle EQM) = 45^\circ \Rightarrow m(\angle MEQ) = 90^\circ \Rightarrow AQ \perp MC$
.....1p

b)

În ΔBMC : $m(\angle BCM) = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$; în ΔBQA : $m(\angle BAQ) = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ$
....1p

În ΔEAC : $m(\angle EAC) = m(\angle ECA) = 45^\circ \Rightarrow \Delta EAC$ isoscel
1p

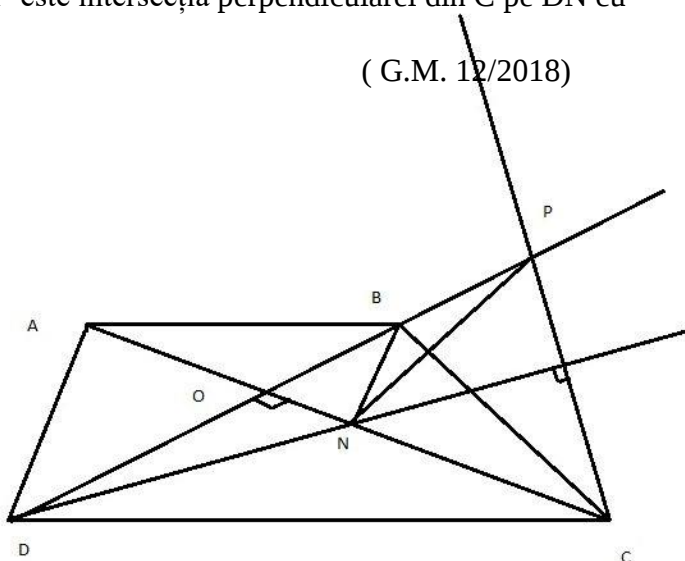
ΔEAC isoscel, F mijloc $[AC] \Rightarrow EF \perp AC$; ΔABC echilateral, F mijloc $[AC] \Rightarrow BF \perp AC \Rightarrow B, E, F$ coliniare
1p

4. Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB < CD$ și $AC \perp BD$. Dacă N este un punct oarecare pe $[OC]$, unde $\{O\} = AC \cap BD$ și P este intersecția perpendicularei din C pe DN cu dreapta BD .

Arătați ca $BN \perp AP$.

(G.M. 12/2018)

Soluție:





$$\left. \begin{array}{l} \triangle PDC; CO \perp DB \text{ (1p)} \\ DN \perp PC \text{ (1p)} \\ CO \cap DN = \{N\} \end{array} \right\} \Rightarrow N \text{ ortocentru} \quad (1p)$$
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} PN \perp DC \\ DC \parallel AB \end{array} \right\} \Rightarrow PN \perp AB \quad (1p)$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle APN; PO \perp AN \text{ (1 p)} \\ AB \perp PN \text{ (1 p)} \\ PO \cap AB = \{B\} \end{array} \right\} \Rightarrow B \text{ ortocentru}$$
$$\Rightarrow BN \perp AP \quad (1p)$$