



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 16 februarie 2019

Clasa a XI-a

Barem de corectare și notare

Problema 1

Fie $A, B \in M_2(C)$. Să se arate că $\det(A+B) = \det(A-B)$ dacă și numai dacă $\operatorname{tr}(A \cdot B^*) = 0$.

Soluție:

$$\text{Fie } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\text{Avem } \det(A+B) = \det(A-B) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-x & b-y \\ c-z & d-t \end{vmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Leftrightarrow (a+x)(d+t) - (b+y)(c+z) = (a-x)(d-t) - (b-y)(c-z) \dots\dots\dots 1p$$

După efectuarea calculelor rezultă

$$at + xd - cy - bz = 0 \quad (1) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Avem } B^* = \begin{pmatrix} t & -y \\ -z & x \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$A \cdot B^* = \begin{pmatrix} at - bz & -ay + bx \\ ct - dz & -cy + dx \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\operatorname{tr}(A \cdot B^*) = at - bz - cy + dx \quad (2) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din (1) și (2) rezultă } \det(A+B) = \det(A-B) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(A \cdot B^*) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

Problema 2

Să se arate că oricare ar fi matricea $A \in M_n(R)$ avem $\det(A^2 + 50A + 1986I_n) \geq 0$ unde I_n este matricea unitate din $M_n(R)$.

Soluție:

$$\text{Avem } A^2 + 50A + 1986I_n = (A + 25I_n)^2 + 1361I_n = \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Notăm cu } B = A + 25I_n \text{ și } C = \sqrt{1361}I_n. \text{ Avem că } BC = CB \quad \dots\dots\dots 1p$$



Deci $A^2 + 50A + 1986I_n = B^2 + C^2$ 1p

Deci: $\det(A^2 + 50A + 1986 \cdot I_n) = \det(B^2 + C^2) = \det((B + iC)(B - iC)) =$
 $= \det((B + iC)(\overline{B + iC})) = \det(B + iC) \cdot \det(\overline{B + iC}) = \det(B + iC) \cdot \overline{\det(B + iC)} =$
 $= |\det(B + iC)|^2 \geq 0$ 3p

Problema 3

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 > 0$ și $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

Soluție:

a) $x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + \sqrt{x_n + 1}}$

Se arată prin inducție că $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$, deci (x_n) mărginit inferior de 0 1p

Avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{1 + \sqrt{x_n + 1}} < 1$, deci (x_n) descrescător 1p

$\Rightarrow (x_n)$ convergent 1p

b) Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $l \in \mathbb{R}$. Prin trecere la limită în relația de recurență avem

$l = \sqrt{l+1} - 1 \Rightarrow l+1 = \sqrt{l+1}$ 1p

$(l+1)^2 - (l+1) = 0 \Rightarrow l(l+1) = 0 \Rightarrow l = 0$ 1p

$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} \xrightarrow{\text{Cesaro-Stolz}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{x_n + 1}} = 0$ 2p

Problema 4

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x + 1}$. Să se calculeze limita

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n} \right)^n$.



Soluție:

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2n + 1} - 1 \quad \dots\dots\dots 3p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2n + 1} - 1}{n} \right)^n = \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2n + 1} - (n+1)}{n} \right)^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 2n + 1} - (n+1) \right)} = e^0 = 1 \quad \dots\dots\dots 2 p$$