

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16 FEBRUARIE 2019
CLASA a VII-a – BAREM

Subiectul 1. Fie numerele raționale pozitive a și b , $a < b$.

a. Demonstrați că $\frac{1}{b} < \frac{1}{\sqrt{a \cdot b}} < \frac{1}{a}$.

b. Arătați că $\frac{2}{3} < (\sqrt{3})^{-1} + (\sqrt{15})^{-1} + (\sqrt{35})^{-1} < \frac{16}{15}$.

Rezolvare:

a. Cum $a < b$ și $a > 0$, avem $a \cdot a < a \cdot b \Leftrightarrow \sqrt{a^2} < \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} < \frac{1}{a}$1p.

Cum $a < b$ și $b > 0$, avem $a \cdot b < b \cdot b \Leftrightarrow \sqrt{ab} < \sqrt{b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$1p.

Obținem $\frac{1}{b} < \frac{1}{\sqrt{a \cdot b}} < \frac{1}{a}$1p.

b. Avem $S = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{35}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \frac{1}{\sqrt{5 \cdot 7}}$...1p.

Conform punctului a. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} < S < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{71}{105} < S < \frac{31}{30}$...1p.

Cum $\frac{71}{105} > \frac{70}{105} > \frac{2}{3}$ și $\frac{31}{30} < \frac{32}{30} < \frac{16}{15}$ inegalitatea este adevărată. ...2p.

Subiectul 2.

a. Demonstrați că pentru orice număr natural nenul are loc relația: $\frac{4}{4n(4n+4)} = \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+4}$.

b. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care avem relația: $\sqrt{\frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{2 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}} = \frac{3\sqrt{10}}{19}$.

Rezolvare:

a. Se aduce la același numitor și se demonstrează. ...2p.

b. $\sqrt{\frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{2 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}} = \frac{3\sqrt{10}}{19} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{4 \cdot 8} + \frac{4}{8 \cdot 12} + \dots + \frac{4}{4n \cdot (n+1)}} = \frac{3\sqrt{10}}{19}$1p

Conform punctului a. obținem $\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+4}} = \frac{3\sqrt{10}}{19}$1p.

$\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4n+4}} = \frac{3\sqrt{10}}{19} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{n}{4n+4}} = \frac{3\sqrt{10}}{19} \Leftrightarrow \frac{n}{4n+4} = \frac{90}{361} \Leftrightarrow n = 360$3p.

Subiectul 3. În trapezul isoscel $ABCD$, ($AD \parallel BC$), ducem $AE \perp BC$, $E \in (BC)$ și $BD \cap AE = \{T\}$.

Punctele M și N sunt mijloacele laturilor AB și CD . Știm că $A_{\triangle ABD} = A_{\triangle ABE}$ și $[AE] \equiv [AD]$. Arătați că:

- punctele M , T și N sunt coliniare;
- DE împarte suprafața trapezului în două suprafețe cu arii egale.

Rezolvare:

$$a. A_{\triangle ABD} = A_{\triangle ABE} \Leftrightarrow \frac{AD \cdot AE}{2} = \frac{BE \cdot AE}{2} \Rightarrow AD = BE.$$

$AD \parallel BE$ și $AD = BE$ obținem $ADEB$ paralelogram, deci T este mijlocul diagonalei AE .

M mijlocul lui AB și T mijlocul lui AE obținem că MT linie mijlocie în $\triangle ABE$, deci $MT \parallel BE$.
 MN linie mijlocie în trapez, $MN \parallel BC$ și $MT \parallel BE$, obținem M , T și N sunt coliniare. ...4p.

b. Construim $DF \perp BC$, $F \in BC$, $DF = AE$ și $BE = FC = EF (= AD)$, deci $EC = 2BE$.

$A_{ABED} = BE \cdot AE$ (paralelogram demonstrat anterior) și $A_{DEC} = \frac{EC \cdot DF}{2} = \frac{2BE \cdot AE}{2}$, de unde rezultă concluzia. ...3p.

Subiectul 4. În triunghiul ABC construim bisectoarele AA' , BB' și CC' și notăm cu I punctul lor de intersecție.

- Calculați măsura unghiului $\sphericalangle BIC$ în funcție de măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.
- Mediatoarele segmentelor BB' și CC' se intersectează în punctul M , mediatoarele segmentelor CC' și AA' se intersectează în N , iar mediatoarele segmentelor AA' și BB' se intersectează în P .
 Demonstrați că, dacă $\triangle MNP \sim \triangle ABC$, atunci $\triangle ABC$ este echilateral.

Rezolvare:

$$a. m(\sphericalangle BIC) = 180^\circ - \frac{m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)}{2} = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{m(\sphericalangle A)}{2} \right) = 90^\circ + \frac{m(\sphericalangle A)}{2}. \quad \dots 2p.$$

b. În patrulaterul $MXIY$ unde X și Y sunt mijloacele lui BB' și CC' , avem

$$m(\sphericalangle M) = 180^\circ - m(\sphericalangle BIC) = 90^\circ - \frac{m(\sphericalangle A)}{2}. \quad \dots 2p.$$

$$\text{Dacă } \triangle MNP \sim \triangle ABC \Rightarrow \sphericalangle M \equiv \sphericalangle A \Rightarrow 90^\circ - \frac{m(\sphericalangle A)}{2} = m(\sphericalangle A) \Rightarrow m(\sphericalangle A) = 60^\circ. \quad \dots 2p.$$

La fel, rezultă că și celelalte unghiuri au măsura 60° , deci triunghiul este echilateral. ...1p.