

Soluții și bareme orientative

Clasa a XII-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) Asociativitatea rezultă imediat din calcul.

(2p)

b) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem: $a * x = a \Leftrightarrow -ax + 2a + 2x - 2 = a \Leftrightarrow a(1-x) - 2(1-x) = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Cum legea este comutativă avem și $x * 2 = 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(3p)

c) Ținând cont de asociativitatea legii, precum și de rezultatul punctului b), obținem:

$$\frac{1}{2018} * \frac{2}{2018} * \dots * \frac{4035}{2018} * \frac{4036}{2018} = \frac{1}{2018} * \frac{2}{2018} * \dots * \underbrace{\frac{4035}{2018} * 2}_{=2} = \dots = 2.$$

(2p)

2. a) Fie $G = \{e, a, b, c\}$. Atunci: $ab \neq a, ab \neq b \Rightarrow ab = c$. Analog $ba = c, ac = ca = b, bc = cb = a$,

(2p)

iar tabla operației lui G este:

(1p)

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Așadar G este abelian.

(1p)

b) Folosind tabla operației lui $(\mathbb{Z}_4, +)$,

(1p)

obținem că $(G, \cdot) \neq (\mathbb{Z}_4, +)$.

(2p)

3. a) $I_{m,1}(x) = \frac{\sin^{m+1}x}{m+1} + C$. Din relația $I_{m,1}(0) = 2018$ avem că

$$I_{m,1}(x) = \frac{\sin^{m+1}x}{m+1} + 2018 \quad (2p)$$

b) $I_{1,n}(x) = -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1} + C$. Din relația $I_{1,n}(0) = 0$ avem că

$$I_{1,n}(x) = -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{1}{n+1} \quad (2p)$$

c)

$$I_{m,n}(x) = \int \cos^{n-1}x \cdot \left(\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\right)' dx \Rightarrow I_{m,n}(x) = \frac{\sin^{m+1}x \cdot \cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}(x) \quad (2p)$$

$$I_{m,n}(x) = \frac{\sin^{m-1}x \cdot \cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}(x) \quad (1p)$$

4. a) Fie $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Deoarece $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot (1 + f^2(x))$,

$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, avem: (2p)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}{2 \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x} + 3 \cdot e^x} dx = \int \frac{\frac{1+f'(x)}{2} - f(x)}{2f(x) + 3 \cdot e^x} dx = \int \frac{f'(x) - f(x)}{2f(x) + 3 \cdot e^x} dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{(2f'(x) + 3 \cdot e^x) - (2f(x) + 3 \cdot e^x)}{2f(x) + 3 \cdot e^x} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{(2f(x) + 3 \cdot e^x)'}{2f(x) + 3 \cdot e^x} dx - \frac{1}{2} \cdot \int dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \ln(2f(x) + 3 \cdot e^x) - \frac{x}{2} + C.
\end{aligned} \tag{2p}$$

b) Folosind substituția $t = \frac{3-x}{3+x}$, obținem: (1p)

$$\int_0^3 \left(\frac{3-x}{3+x} \right)^{2016} \cdot \left(\frac{1}{3+x} \right)^2 dx = \frac{1}{6} \int_0^1 t^{2016} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2017}. \tag{2p}$$