



## Olimpiada Națională de Matematică

### Etapă Locală

### Clasa a XI-a

8 februarie 2025

#### Subiectul 1

Determinați matricele  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  cu proprietatea că  $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ .

#### Subiectul 2

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$  și  $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ ,  $n \geq 1$ .

- a) Arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .
- b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot (1 - x_n)$ .

#### Subiectul 3

- a) Arătați că dacă  $M$  este o matrice din  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  pentru care există  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $M^n = O_2$ , atunci  $M^2 = O_2$ .
- b) Arătați că există o infinitate de matrice  $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}^*)$  care au proprietățile  $X^{2025} = Y^{2025} = O_2$  și  $(X - Y)^{2026} = I_2$ .

#### Subiectul 4.

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $x_1 > 0$  și  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\ln(n + x_n)}$ , pentru  $n \geq 1$ . Aflați limita șirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  și arătați că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \cdot x_n = 1$ .

Gazeta Matematică, nr. 6-7-8/2024

**Notă.** Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore