OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013
Barem, clasa a XII– a

1. a) Facem substituţia $t=\frac{1}{u}\Rightarrow dt=-\frac{1}{u^2}du$ şi notând integrala cu I avem

$I=-\int_x^{\frac{1}{x}}\frac{arctg\frac{1}{u}}{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+1}\frac{du}{u^2}=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{arctg\frac{1}{t}}{t^2+t+1}dt,\ldots$(1p), deci $2I=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{arctg\,t+arctg\frac{1}{t}}{t^2+t+1}dt\ldots$(1p), iar folosind identitatea $arctg\,t+arctg\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2},\forall\, t>0$ obţinem $I=\frac{\pi}{4}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}=$

$=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-arctg\frac{\frac{2}{x}+1}{\sqrt{3}}\right).\ \ldots$(2p)

b) Fie $I(x)=\int_0^x\frac{arctg\,t}{t^2+t+1}dt=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{arctg\,t}{t^2+t+1}dt+\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{arctg\,t}{t^2+t+1}dt=I_1(x)+I_2(x),\ \forall\, x>0.\ldots$(1p)

$I_1(x)=\frac{1}{x}\frac{arctg\,c_x}{c_x^2+c_x+1}$ cu $c_x\in\left(0,\frac{1}{x}\right)$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}I_1(x)=0.\ldots$.(1p). Atunci $\lim\limits_{x\to\infty}I(x)=\lim\limits_{x\to\infty}I_2(x)\underset{conf.a)}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-arctg\frac{\frac{2}{x}+1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$ …..(1p)

2. Observăm că $\frac{x^2+x+1}{(x+1)^3}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3},\ \forall x>-1$…..(1p).

Notând integrala cu I avem

$I=\int\frac{e^x\cos x}{x+1}dx-\int\frac{e^x\cos x}{(x+1)^2}dx+\int\frac{e^x\cos x}{(x+1)^3}dx=I_1-I_2+I_3\ldots$.(1p). In continuare aplicăm integrarea prin părţi, astfel pentru I_1 luăm $f(x)=\frac{1}{x+1},\ g(x)=\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)\ldots$(2p), iar pentru I_3 luăm $f(x)=e^x\cos x,\ g(x)=-\frac{1}{2(x+1)^2}$…..(2p). După aplicare se va reduce I_2, deci

$I=\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{2(x+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{(x+1)^2}dx-I_2-\frac{e^x\cos x}{2(x+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{e^x(\cos x-\sin x)}{(x+1)^2}dx=$

$=\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{2(x+1)}-\frac{e^x\cos x}{2(x+1)^2}+C,C\in\mathbb{R}.$Finalizare….(1p).

3. a) Verificarea axiomelor grupului abelian…..(3p)

b) Din f morfism avem $f(x+y)=f(x)\circ f(y),\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, iar prin inducţie matematică se demonstrează relaţia (1) $\underbrace{f(x)\circ f(x)\circ\ldots\circ f(x)}_{n\,ori}=f(nx),\forall\, n\in N^*\ldots$(1p). Aflarea inversei funcţiei $f^{-1}:G\to R,f^{-1}(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\forall\, x\in G\ldots$.(1p). Inlocuind x cu $f^{-1}(x)$ în relaţia (1) se obţine $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n\,ori} = f\left(n f^{-1}(x)\right) = \dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^{n} - \left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^{-n}}{\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^{n} - \left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^{-n}}$ ….(1p). Finalizarea problemei prin înlocuirea lui $n = 2013$ ….(1p).

4. a) Inlocuind $x = a$ în relaţie se obţine $a^2 = e \Leftrightarrow a = a^{-1}$ …(1p), unde e este elementul neutru al grupului G. Relaţia din enunţ devine (1) $x^3 = axa, \forall x \in G$. Inlocuind în (1) $x = ax \in G$ avem $(ax)^3 = a(ax)a \Leftrightarrow (ax)(ax)(ax) = aaxa \Leftrightarrow x(axa)x = axa \Leftrightarrow x \cdot x^3 \cdot x = x^3 \Leftrightarrow x^2 = e, \forall x \in G \Leftrightarrow G$ este grup comutativ. Finalizare…(2p)

b) Deoarece $(n, 2013) = 1$ atunci există $l, p \in Z$ astfel încât $nl + 2013p = 1$ ….(1p). Atunci avem $xy = x^{nl+2013p} y^{nl+2013p} = \left(x^n\right)^l \left(x^p\right)^{2013} \left(y^n\right)^i \left(y^p\right)^{2013}$ …(1p).

Deoarece $ordG = n \Rightarrow x^n = e, \forall x \in G$ …(1p) atunci $xy = \left(x^p\right)^{2013}\left(y^p\right)^{2013} \underbrace{=}_{ipoteza} \left(y^p\right)^{2013}\left(x^p\right)^{2013} = y^{2013p}\left(y^n\right)^i x^{2013p}\left(x^n\right)^p = y^{2013p+ni} x^{2013p+ni} = yx$, deci grupul este comutativ….(1p)