



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a V-a

Barem de corectare

1. a)

$$a = 503 \cdot [1 \cdot (4 + 100) - (101 - 1)] + 1$$

$$a = 503 \cdot [104 - 100] + 1$$

$$a = 503 \cdot 4 + 1$$

3p

$$a = 2012 + 1$$

$$a = 2013$$

$$b = 2015 \cdot (1009 + 1004) - 2013 \cdot 2 = 2015 \cdot 2013 - 2013 \cdot 2 = 2013 \cdot 2013 = 4052169 \quad 2p$$

b) $2013^2 = 2013 \cdot 2013$

$$2013^2 = 2013^2 \quad 2p$$

2. a) $S = 2011 \cdot (2012 : 2) = 2023066 \quad 4p$

b) $1 + 2 + 3 + \dots + 2011 = 2023066 \quad 1p$

rezultă $2023066 < 2023067$, $1p$

rezultă unul din numere poate să fie mai mare decât 2011. $1p$

3. t – vârsta tatălui

g – vârsta unuia dintre gemeni

rezultă $t + 2g = 40 \quad 1p$

$$t + 16 = 2g + 32 \quad 1p$$

$$t = 2g + 32 - 16 \quad 1p$$

$$t = 2g + 16 \quad 1p$$

$$2g + 16 + 2g = 40 \quad 1p$$

$$4g = 40 - 16 \quad 0,5p$$

$$4g = 24 \quad g = 6 \quad 0,5p$$

$$t = 28 \quad 0,5p$$

Răspuns: Vârsta tatălui 28 ani, vârsta unui copil 6 ani. $0,5p$

(Se acceptă oricare altă metodă corectă de rezolvare)



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VI-a

Barem de corectare

Nr. probl.	Rezolvare	Pct.
1.a)	În ecuația $2m + 3p + 4t = 56$, unde m, p, t numere prime $2m, 4t$ și 56 se divid cu $2 \Rightarrow 3p$ trebuie să se dividă cu 2 , dar p este prim $\Rightarrow p = 2$	1p
	Înlocuim p și obținem: $2m + 4t = 50$ Împărțind ecuația cu 2 avem: $m + 2t = 25$	1p
	$m = 3 \Rightarrow 3 + 2t = 25 \Rightarrow t = 11$ $m = 5 \Rightarrow t = 10$ nu este prim $m = 7 \Rightarrow t = 9$ nu este prim $m = 11 \Rightarrow t = 7$ $m = 13 \Rightarrow t = 6$ nu este prim $m = 17 \Rightarrow t = 4$ nu este prim $m = 19 \Rightarrow t = 3$ $m = 23 \Rightarrow t = 1$ nu este prim $m = 29 \geq 25$	2p
	Rezultatele sunt: $m = 3, p = 2, t = 11$ $m = 11, p = 2, t = 7$ $m = 19, p = 2, t = 3$	1p
1.b)	$n : 2010$ Calculul sumei $n = 1005 \cdot 2011 = 2021055$	1p
	Aflarea restului 1005	1p
2.a)	Obs. că $a \neq 0$. Relația din enunț devine: $100 + \overline{ab} + 10 \cdot \overline{ab} + 2 = (\overline{ab})^2$ de unde,	1p
	$11 \cdot \overline{ab} + 102 = (\overline{ab})^2$ $(\overline{ab})^2 - 11 \cdot \overline{ab} = 102$	1p
	$\overline{ab}(\overline{ab} - 11) = 102$ Dar, $102 = 51 \cdot 2 = 34 \cdot 3 = 17 \cdot 6$	1p



	Asadar, soluția problemei sunt: $\overline{ab} = 17, \overline{ab} - 11 = 6,$ De unde, $\overline{ab} = 17$	1p
2b)	$\overline{abba} = 1001a + 110b$ $1001 = 3 \cdot 7 \cdot 11$ $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$	1p
	a) $7 / 1001$ deci $7 / 1001a \quad \forall a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ și $7 / \text{divide } \overline{abba}$ dacă $7 / 110b$. Cum 7 nu divide pe 110 trebuie să dividă pe $b \Rightarrow b \in \{0,7\}$ Deci, 18 numere.	1p
	b) $11 / 1001$ deci $11 / 1001a, \quad \forall a \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $11 / 110$ deci $11 / 110b$ $\forall b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ Deci, 90 de numere.	1p
3. a)	Se notează $x = m(\sphericalangle AOP)$ [OA este bisectoare $\Rightarrow m(\sphericalangle MOA) = x \Rightarrow m(\sphericalangle MOB) = 2x$	1p
	$m(\sphericalangle AOP)$ și $m(\sphericalangle NOC)$ opuse la vârf $\Rightarrow m(\sphericalangle NOC) = x$	1p
	[ON – bisectoare $\Rightarrow m(\sphericalangle BON) = x$	1p
	Avem $m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle MOB) + m(\sphericalangle BON) + m(\sphericalangle NOC) = 180^\circ$ $\Rightarrow x + 2x + x + x = 180^\circ \Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ$	1p
	Avem $m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle MOB) = x + 2x = 108^\circ$ $\Rightarrow m(\sphericalangle POB) = 4x = 154^\circ$	1p
3b)	Din [OR – bisectoarea $\sphericalangle MON \Rightarrow m(\sphericalangle MOR) = \frac{m(\sphericalangle MON)}{2}$ $\Rightarrow m(\sphericalangle MOR) = \frac{3x}{2} = 54^\circ$	1p
	$\Rightarrow m(\sphericalangle AOR) = m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle MOR) = 90^\circ \Rightarrow OR \perp AC$	1p



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a VII-a

Barem de corectare

Problema 1. $CD = x, P_{ABCD} = 4x + 6$

(1 punct)

$$x = 3$$

(1 punct)

$$A_{ABCD} = 18 \text{ cm}^2$$

(1 punct)

$$A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot h_1}{2} = \frac{AB \cdot h_2}{2} = 12$$

(1 punct)

$$d(A, BC) = \frac{24}{5}$$

(1 punct)

S centru de greutate în triunghiul PAB .

(1 punct)

$$\frac{A_{ASM}}{A_{ASP}} = \frac{SM}{SP} = \frac{1}{2}$$

(1 punct)

Problema 2. $a + 1 = 2^{2014}$

(3 puncte)

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a + 1} + 2} = 2^{1007} + 1$$

(2 puncte)

Restul împărțirii lui a la 14 este 1.

(1 punct)

$$k = 14s + 13, s \in \mathbb{N}$$

(1 punct)

Problema 3.

După 6 zile călătorul ajunge în M_2 .

(2 puncte)

După 30 de zile călătorul ajunge în M_4 .

(1 punct)

După $2^{n+1} - 2$ zile călătorul ajunge în M_n .

(2 puncte)

După 98 de zile călătorul ajunge la 1 km de punctul C .

(1 punct)

Dacă $AB = d$, în k zile călătorul va parcurge distanța $AS_k = \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) d =$

$$\frac{k}{2(k+2)} d, AS_k \geq AC \Leftrightarrow \frac{k}{2(k+2)} \geq \frac{1}{2},$$

relație imposibilă.

(1 punct)

Problema 4. $\frac{CN}{AC} = \frac{NY}{YA} = \frac{MX}{XA} = \frac{BM}{AB}$

(3 puncte)

$$AN = AM$$

(2 puncte)

$$m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$$

(2 puncte)



Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

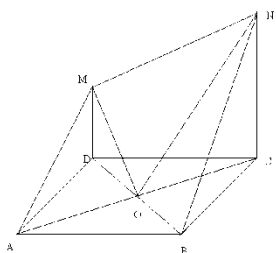
Clasa a VIII-a

Barem de corectare

1. a) $(3X - \sqrt{3})^2 + (5Y - \sqrt{5})^2 = 0$ 2p
 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ si $y = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 1p
Finalizare1p
b) Inegalitatea din enunț este echivalentă cu
 $xyz^4 - 2xyz^2t^2 + xyt^4 \geq xyz^4 - x^2z^2t^2 - y^2z^2t^2 + xyt^4$ 2p.
Echivalent cu $z^2t^2(x - y)^2 \geq 0$ 1p
2. a) $x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$
- după raționalizarea numitorilor obținem
 $\frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} + \dots + \frac{\sqrt{2024}-\sqrt{2025}}{2024-2025} =$ 1p
 $= -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4} - \sqrt{4} + \dots - \sqrt{2024} + \sqrt{2025} =$ 1p
 $= -1 + 45 = 44 \in \mathbb{N}$ ($\sqrt{2025} = 45$)1p
b) i) $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$ 1p
 $= (ab - 1)^2 + (a + b)^2$ 1p
ii) $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (ab - 1)^2 + (a + b)^2 \geq 2\sqrt{(ab - 1)^2(a + b)^2}$ 1p
 $= 2(ab - 1)(a + b)$ 1p
3. a) Presupunem prin absurd că A, M, N, B sunt coplanare. Obținem că MN || AB, contradicție.....2p
b) Folosind teorema celor trei perpendiculare, se obține d(M, AC)= MO.1p
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MDO obținem MO= $3\sqrt{6}$ cm.....1p
c)Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic NCO obținem NO = $3\sqrt{11}$ cm.....1p



În trapezul dreptunghic MNCD se obține $MN = 3\sqrt{5}$ cm.....1p



Conform reciprocii teoremei lui Pitagora triunghiul MON este dreptunghic deci $MN \perp MO$. Dacă triunghiul MON este dreptunghic,

$$\text{atunci } A_{MON} = \frac{MN \cdot MO}{2} = \frac{9\sqrt{30}}{2} \text{ cm}^2 \dots\dots\dots 1p$$

4. a) SABCD – piramidă patrulateră regulată $\Rightarrow AQ \equiv NC$

Fie QE perpendicular pe AC, deci $AE \equiv CF$, $OE \equiv OF$, $EQ \equiv NF$, NF este perpendicular pe AC, $QE \parallel NF$,.....1p

Deci EQFR este paralelogram.....1p

$RQ \cap EF = \{O\}$, $QR \cap BD = \{O\}$ deci B,R,Q, D sunt coplanare.....1p

b) $BM \equiv DP$, SBD triunghi isoscel, deci $PM \parallel BD$1p

Unghiului dintre dreptele MP și RQ este congruent cu unghiului dintre dreptele BD și RQ.....1p

BD este perpendicular pe planul (ASC) și OQ inclusă în planul (ASC), deci BD este perpendicular pe OQ.....1p

Deci, măsura unghiului dintre dreptele MP și RQ este 90°1p