



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
14 DECEMBRIE 2019**

CLASA a VII-a

Subiectul 1.

- a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ cu proprietatea că $\sqrt{2 \cdot \overline{ab} - 3 \cdot (a - 5b) + 17} \in \mathbb{N}$.
- b) Fie A produsul primelor 1010 numere pare nenule și B produsul primelor 1010 numere impare. Arătați că media geometrică a numerelor A și B este un număr irațional.

Subiectul 2.

- a) Arătați că $x \notin \mathbb{Q}$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, unde $x = \sqrt{\frac{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}}{1 + 2 + 3 + \dots + n}}$
- b) Arătați că, oricare ar fi numerele naturale impare p și q , numărul $\sqrt{p^2 + q^2 + 2020}$ este irațional.

Subiectul 3.

Se consideră paralelogramul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$. Fie M simetricul lui A față de B , $OM \cap BC = \{N\}$, $AN \cap CM = \{P\}$.

- a) Demonstrați că patrulaterul $OPBA$ este paralelogram ;
- b) Dacă $A_{\triangle MNP} = 36 \text{ cm}^2$, atunci calculați A_{ABCD} .

Subiectul 4.

În patrulaterului convex $ABCD$, O este punctul de intersecție al diagonalelor, $OA = 3OC$, $OB = OD$ și $\angle A < 60^\circ$.

- a) Dacă E este mijlocul diagonalei AC , demonstrați că patrulaterul $BECD$ este paralelogram.
- b) Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ poate avea cel mult un unghi drept.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru: 3 ore