

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
26.02.2017**

CLASA a VIII - a

Subiectul I

Fie n un număr natural nenul.

- a) Arătați că: $\frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
- b) Arătați că: $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2017 \cdot 2018 \cdot 2019} < \frac{1}{4}$.
- c) Arătați că: $\frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1}{6 \cdot 9 \cdot 12} + \frac{1}{9 \cdot 12 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{2016 \cdot 2019 \cdot 2022} = \frac{1}{54} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{673 \cdot 674} \right)$.

Subiectul II

- a) Arătați că pentru orice număr natural nenul n , există un număr natural $a \geq n$ astfel încât $\sqrt{n(a-n)} = \frac{a}{2}$.
- b) Să se determine numerele naturale $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$ care verifică egalitatea:

$$\sqrt{a_1 - 1} + \sqrt{2(a_2 - 2)} + \sqrt{3(a_3 - 3)} + \dots + \sqrt{2017(a_{2017} - 2017)} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2017}}{2}.$$
- c) Să se arate că nu există 2017 numere naturale $a_1, a_2, \dots, a_{2017}$ care verifică relația:

$$\sqrt{a_1 - 1} - \sqrt{2(a_2 - 2)} + \sqrt{3(a_3 - 3)} - \dots + \sqrt{2017(a_{2017} - 2017)} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2017}}{2}.$$

Subiectul III

În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$, $ABCD$ este pătrat, $AB = a$, $AA' = b$, unde $a, b > 0$.

- a) Demonstrați că perpendiculara dusă din D pe planul (ACD') trece prin ortocentrul H al triunghiului (ACD') .
- b) Dacă punctele D, H și B' sunt coliniare, arătați că $a = b$.

Subiectul IV

Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, E piciorul perpendicularei duse din B pe AC , F mijlocul segmentului $[AE]$ și G mijlocul segmentului $[DC]$.

- a) Arătați că $\widehat{FBG} \equiv \widehat{CBE}$.
- b) Dacă M este un punct situat pe perpendiculara ridicată în punctul G pe planul dreptunghiului $ABCD$, arătați că $FB \perp (FGM)$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte

Timp de lucru 3 ore