

MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

CLASA A 11 A

Soluții și barem de corectare

1. a) calcul direct (3p)

b) din a) rezultă că $\det(\alpha A + I_n) \neq 0$ deci $\alpha A + I_n$ este inversabilă și obținem

$$\alpha B + I_n = (\alpha A + I_n)^{-1} \quad (2p)$$

De aici deducem că $(\alpha B + I_n)(\alpha A + I_n) = I_n$, de unde $\alpha BA + B + A = 0_n$, de unde $AB = BA$ (2p)

2. a) $a_n = \frac{1}{n}$ (1p)

$(b_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător și mărginit superior, deci convergent (2p)

b) $a_n = \sqrt[n-1]{n!}$ (2p)

finalizare (2p)

3. Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ cu $a_{ii} = b$ dacă $i \in \{2, \dots, n\}$ și $a_{ij} = a$ altfel. Atunci $\det(A) = a(b-a)^{n-1} \geq 0$ (2p)

Dacă A' este matricea obținută prin interschimbarea a două linii ale lui A , atunci $A' \in M_n(a, b)$ și deci $\det(A') = -\det(A) \geq 0$. Așadar $a(b-a)^{n-1} = 0$ (2p)

În mod analog (prin interschimbarea lui a cu b) se obține că $b(a-b)^{n-1} = 0$ (2p)

Din aceste relații rezultă că $a = b$ (1p)

4. a) cum $x_{2n} \leq 2 - \frac{1}{x_n}, n \geq 1$, este suficient să arătăm că $2 - \frac{1}{x_n} \leq x_n \Leftrightarrow (x_n - 1)^2 \geq 0, n \geq 1$ (2p)

b) Să presupunem că există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ cu $x_{n_0} < 1$. Definind șirul $y_n = x_{2^n \cdot n_0}, n \in \mathbb{N}$, se obține că

$y_{n+1} + \frac{1}{y_n} \leq 2, n \in \mathbb{N}$. Din a) rezultă că $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător și cum $y_n > 0, n \in \mathbb{N}$ se obține că

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și fie l limita acestuia. Trecând la limită în relația

$y_{n+1} \cdot y_n + 1 \leq 2y_n, n \in \mathbb{N}$, deducem că $l = 1$, contradicție (3p)

c) Nu în mod necesar. De exemplu $x_n = 2 - (-1)^n, n \geq 1$, verifică cerința fără a fi convergent (2p)