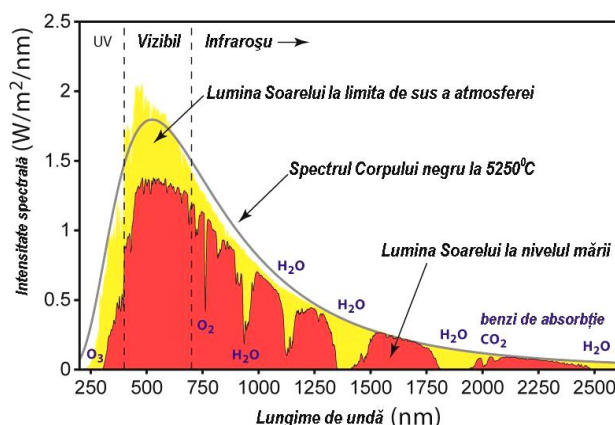
**Soluție - Problema I****Modelarea climei terestre (10 puncte)**

Schimbarea climei și încălzirea globală, viețuirea speciei umane în condiții climaterice noi, au devenit subiecte de interes public în ultimele decenii.

La scară cosmică singurele fenomene care intervin în echilibrul energetic al Pământului sunt absorbția și emisia radiației. Se poate spune că starea climei terestre se datorează echilibrului delicat dintre energia pe care Pământul o iradiază spre spațiul cosmic și energia pe care planeta noastră o captează de la formidabila sursă de energie care este Soarele.

Un corp care absoarbe radiația electromagnetică ce ajunge la suprafața sa, indiferent de lungimea de undă a acestei radiații și care emite radiație electromagnetică în funcție de temperatura suprafeței sale se numește corp negru. Un corp negru emite energie cu o distribuție spectrală specifică, dependentă de temperatura proprie. Linia plină, lisă, din graficul din imaginea de mai sus evidențiază distribuția spectrală a emisiei de energie a Soarelui (echivalent unui corp negru cu temperatura $T_{\text{Soare}} = 5250^\circ\text{C}$).

Dacă I reprezintă energia totală (în întreg spectrul) emisă de unitatea de suprafață a unui corp negru în unitatea de timp, iar T este temperatura absolută a corpului negru, atunci legea Stefan – Boltzmann statuează că $I = \sigma \cdot T^4$. În această expresie $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ este constanta Stefan – Boltzmann.



A. Energia provenită de la Soare determină un flux energetic $w_s = 1370 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, pe o sferă cu raza egală cu distanța de la Pământ la Soare. Utilizează o modelare simplă, în care energia este preluată de la Soare și este disipată de Pământul considerat un corp negru și determină temperatura T_p pe care ar avea-o Pământul, în conformitate cu acest model.

B. Modelarea simplă de la punctul A se bazează pe ipoteza că Pământul este un corp negru. Ipoteza este nerealistă, deoarece toate imaginile luate din spațiu arată Pământul ca un corp luminos. Atmosfera terestră (mai ales norii) reflectă aproximativ 24% din energia care vine de la Soare, iar suprafața Pământului (mai ales de zonele cu ghețuri) reflectă încă 6% din energia incidentă. Caracteristica numită albedo măsoară raportul dintre fluxul energetic reflectat și fluxul energetic incident. Consideră că albedo-ul terestru este $A = 30\%$ și determină temperatura Pământului, utilizând un nou model, care ia în considerare reflexia parțială a luminii provenite de la Soare.

C. În timp ce Soarele emite energie mai ales în domeniul vizibil, temperatura relativ scăzută a suprafeței terestre face ca emisia Pământului să fie localizată în zona infraroșie a spectrului. O modelare mai atentă a climei ia în considerare proprietățile atmosferei. Aceasta este un amestec de gaze cu proprietăți absorbante specifice. Spectrul prezentat în imaginea de mai sus evidențiază că în diferite domenii spectrale unele dintre gazele atmosferice pot absorbi radiație. Caracterizarea absorbției pe domenii spectrale se poate face prin introducerea coeficienților de absorbție în vizibil α_{vis} și respectiv în infraroșu α_{ir} , exprimați prin raportul dintre energia care trece prin atmosferă și energia care pătrunde în atmosferă. Dacă radiația este complet absorbită atunci $\alpha = 0$, iar dacă radiația nu este absorbită de loc $\alpha = 1$. Determină temperatura Pământului T_p într-un model care se ia în considerare reflexia parțială a luminii provenite de la Soare (albedoul $A = 0,3$) și proprietățile absorbante ale atmosferei ($\alpha_{\text{vis}} = 0,8$ și $\alpha_{\text{ir}} = 0,1$).

D. Folosind modelul de la punctul C calculează temperatura la suprafața Pământului, în situația în care albedoul și coeficienții de absorbție au valorile indicate în tabelul 1. Completează acest tabel cu valorile temperaturii la suprafața Pământului pe care le-ai obținut.

Caz	1	2	3	4
w_s	1370	1370	1370	1370
α_{vis}	1	1	1	1
α_{ir}	1	1	0	0
A	0,3	0	0	0,3
T''_p (K)				
T''_p (°C)				

Tabel 1

E. Presupune că distanța dintre Pământ și Soare ar crește cu 1% . Care ar fi temperatura Pământului în acest caz (conform modelului de la punctul C), dacă $A = 0,3$, $\alpha_{ir} = 0,3$ și $\alpha_{vis} = 0,6$.

F. Presupune că în urma unor explozii nucleare în Sahara o parte din nisip s-ar transforma într-o „ oglindă de sticlă”. Estimează suprafața pe care ar trebui să o aibă o astfel de oglindă pentru ca temperatura Pământului să scadă cu 1% . Folosește modelarea de la punctul C.

G. Într-o zi însorită de vară, la amiază vrei să aprinzi o bucată de hârtie concentrând razele de lumină provenite de la Soare cu ajutorul unei lupe cu distanța focală $f = 150 \text{ mm}$ și diametrul $D = 50 \text{ mm}$.

Cunoscând:

- diametrul unghiular al Soarelui $\alpha = 4,6 \text{ mrad}$;
- fluxul termic primit de Pământ de la Soare $J_s = 1400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$;
- temperatura mediului înconjurător $T_0 = 300 \text{ K}$;
- masa unității de suprafață a bucății de hârtie $\rho_\sigma = 80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$;
- căldura specifică a hârtiei $c = 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- raportul dintre puterea absorbită și cea incidentă $\gamma = 10^{-2}$;
- temperatura de aprindere a hârtiei $T_{\text{aprindere}} = 505 \text{ K}$

estimează intervalul de timp după care foaia de hârtie se va aprinde.

Soluție

A. Energia care vine de la Soare pe un „cerc mare” al Pământului, (suprafața efectivă expusă către Soare) trebuie să fie egalată de energia pe care Pământul, considerat sferă cu raza R_p și temperatura T_p , o emite la rândul său.

$$w_s \cdot \pi \cdot R_p^2 = 4\sigma \cdot T_p^4 \cdot \pi \cdot R_p^2 \quad (1)$$

de unde temperatura Pământului în această modelare este

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{w_s}{4\sigma}} \quad (2)$$

cu valoarea numerică

$$T_p = \sqrt[4]{\frac{1370}{4 \times 5,67 \times 10^{-8}}} \cong 279 \text{ K} = 6^\circ \text{C} \quad (3)$$

Răspunsul, deși în domeniul de temperaturi rezonabile la suprafața Pământului, este nerealist pentru o descriere acurată a climei. Un răspuns acceptabil ar fi o temperatură de aproximativ 16°C .

B. Energia care vine de la Soare pe un „cerc mare” al Pământului, (suprafața efectivă expusă către Soare) este parțial reflectată. Astfel, $1 - A = 70\%$ din energia Soarelui este absorbită la suprafața Pământului și trebuie să fie egalată de energia pe care Pământul, considerat sferă cu raza R_p și cu temperatura T_p' , o emite la rândul său.

$$0,7 \times w_s \cdot \pi \cdot R_p^2 = 4\sigma \cdot T_p'^4 \cdot \pi \cdot R_p^2 \quad (4)$$

de unde temperatura Pământului în această modelare este

$$T_p' = \sqrt[4]{\frac{0,7 \times w_s}{4\sigma}} \quad (5)$$

cu valoarea numerică

$$T_p' = \sqrt[4]{\frac{0,7 \times 1370}{4 \times 5,67 \times 10^{-8}}} \cong 255K = -18^\circ C \quad (6)$$

Rezultatul acestei modelări, evident nerealist trebuie corijat printr-o altă modelare.

C. În condițiile considerate, energia care ajunge la suprafața Pământului venind de la Soare este E_s

$$E_s = \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} \quad (7)$$

Energia E_p reemisă de Pământul considerat corp negru la temperatura T_p'' este

$$E_p = 4\pi \cdot \sigma \cdot R_p^2 \cdot T_p''^4 \quad (8)$$

Datorită gazelor care absorb radiația din infraroșu, (gaze cu efect de seră), o parte E_a din energia radiată de Pământ este absorbită în atmosferă.

Bilanțul energetic la suprafața Pământului conduce – în această modelare – la următoarea expresie

$$\begin{cases} E_s + E_a = E_p \\ \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} + E_a = 4\pi \cdot R_p^2 \cdot \sigma \cdot T_p''^4 \\ (w_s/4) \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} + E_a / (4\pi \cdot R_p^2) = T_p''^4 \cdot \sigma \end{cases} \quad (9)$$

La limita de sus a atmosferei

$$\begin{cases} E_p \cdot \alpha_{ir} + E_a = \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \\ 4\pi \cdot R_p^2 \cdot \sigma \cdot T_p''^4 \cdot \alpha_{ir} + E_a = \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \\ \sigma \cdot T_p''^4 \cdot \alpha_{ir} + E_a / (4\pi \cdot R_p^2) = (w_s/4) \cdot (1 - A) \end{cases} \quad (10)$$

Din relațiile de mai sus rezultă

$$\begin{cases} (w_s/4) \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} + E_a / (4\pi \cdot R_p^2) = T_p''^4 \cdot \sigma \\ (w_s/4) \cdot (1 - A) - E_a / (4\pi \cdot R_p^2) = \sigma \cdot T_p''^4 \cdot \alpha_{ir} \\ (w_s/4) \cdot (1 - A) (\alpha_{vis} + 1) = \sigma \cdot T_p''^4 \cdot (\alpha_{ir} + 1) \end{cases} \quad (11)$$

Și prin urmare

$$T_p'' = \sqrt[4]{\frac{(w_s/4) \cdot (1 - A) (\alpha_{vis} + 1)}{\sigma}} \quad (12)$$

cu valoarea numerică

$$T_p'' = \sqrt[4]{\frac{(1370/4) \cdot 0,7 \cdot \frac{1,8}{1,1}}{5,67 \times 10^{-8}}} \cong 288,4K = 15,4^\circ C \quad (13)$$

D.

Caz	1	2	3	4
w_s	1370	1370	1370	1370
α_{vis}	1	1	1	1
α_{ir}	1	1	0	0
A	0,3	0	0	0,3
$T''_p (K)$	255	279	331	303
$T''_p (^\circ C)$	-19	5	57	29

E. Deoarece energia provenită de la Soare se împrășteie pe o suprafață de $4\pi \cdot (1,01 \times R)^2$, noua constantă solară w'_s verifică relația

$$4\pi \cdot (1,01 \times R)^2 \cdot w'_s = 4\pi \cdot (R)^2 \cdot w_s \quad (14)$$

și prin urmare

$$w'_s = \frac{w_s}{(1,01)^2} \quad (15)$$

cu valoarea numerică

$$w'_s = 1343 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \quad (16)$$

Pentru noua situație

$$\begin{cases} T''_p = \sqrt[4]{\frac{(w'_s/4)}{\sigma} \cdot (1-A) \frac{(\alpha_{vis}+1)}{(\alpha_{ir}+1)}} \\ T''_p = \sqrt[4]{\frac{(1343/4)}{5,67 \times 10^{-8}} \cdot 0,7 \frac{1,6}{1,3}} \\ T''_p \cong 267 \text{ K} = -6^\circ \text{C} \end{cases} \quad (17)$$

F. Existența oglinzii cu suprafața $s = x \cdot \pi \cdot R_p^2$ conduce la scăderea suprafeței „de captură” a energiei solare la valoarea $\pi \cdot R_p^2 \cdot (1 - x/2)$ și de asemenea la scăderea suprafeței emițătoare la valoarea $\pi \cdot R_p^2 \cdot (4 - x)$. În modelarea aproximativă, descrisă la punctul C, bilanțul energetic la suprafața Pământului este

$$\begin{cases} E_s + E_a = E_p \\ \pi \cdot R_p^2 (1 - x/2) \cdot w_s \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} + E_A = \pi \cdot R_p^2 \cdot (4 - x) \cdot \sigma \cdot T_{P, \text{Sahara}}^4 \\ (w_s) \cdot (1 - A) \cdot (1 - x/2) \cdot \alpha_{vis} + E_A / (\pi \cdot R_p^2) = T_{P, \text{Sahara}}^4 \cdot (4 - x) \cdot \sigma \end{cases} \quad (18)$$

La limita de sus a atmosferei

$$\begin{cases} E_p \cdot \alpha_{ir} + E_a = \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \\ \pi \cdot R_p^2 (4 - x) \cdot \sigma \cdot T_{P, \text{Sahara}}^4 \cdot \alpha_{ir} + E_A = \pi \cdot R_p^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ \sigma \cdot T_{P, \text{Sahara}}^4 \cdot \alpha_{ir} \cdot (4 - x) + E_A / (\pi \cdot R_p^2) = (w_s/4) \cdot (1 - A) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) \end{cases} \quad (19)$$

Din relațiile de mai sus rezultă

$$\begin{cases} w_s \cdot (1-A) \cdot (1-x/2) \cdot \alpha_{vis} + E_A / (\pi \cdot R_p^2) = T_{P, Sahara}''^4 \cdot (4-x) \cdot \sigma \\ w_s \cdot (1-A) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sigma \cdot T_{P, Sahara}''^4 \cdot \alpha_{ir} \cdot (4-x) + E_A / (\pi \cdot R_p^2) \\ w_s \cdot (1-A) (\alpha_{vis} + 1) \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) = \sigma \cdot T_{P, Sahara}''^4 \cdot (\alpha_{ir} + 1) \cdot (4-x) \end{cases} \quad (20)$$

Și prin urmare

$$T_{P, Sahara}'' = \sqrt[4]{\frac{w_s}{\sigma} \cdot (1-A) \cdot \frac{(\alpha_{vis} + 1)}{(\alpha_{ir} + 1)} \cdot \frac{1-x/2}{4-x}} \quad (21)$$

Temperatura trebuie să scadă cu 1°C adică trebuie să aibă valoarea 287,4K

În aceste condiții

$$\begin{cases} \frac{T_{P, Sahara}''}{T_P''} = \sqrt[4]{\frac{1-x/2}{1-x/4}} \\ \frac{1-x/2}{1-x/4} = \left(\frac{T_{P, Sahara}''}{T_P''}\right)^4 = k \end{cases} \quad (22)$$

Cu valoarea numerică

$$k = 0,9862 \quad (23)$$

rezultă că

$$x = 0,0544 \quad (24)$$

Valoarea absolută a suprafeței vitroase este

$$s = x \cdot \pi \cdot R_p^2 \quad (25)$$

$$s = 0,0544 \times \pi \times 6400^2 \cong 7 \times 10^6 \text{ km}^2$$

Suprafața Saharei este de $9 \times 10^6 \text{ km}^2$.

G. Problema propune estimarea intervalul de timp necesar încălzirii unei porțiuni dintr-o bucată de hârtie, până la temperatura de aprindere. Încălzirea se realizează utilizând o lupă care focalizează lumina solară într-o zonă de mici dimensiuni de pe bucata de hârtie.

Presupune că Soarele este sferic și plasat la infinit; astfel imaginea acestuia formată cu ajutorul lupei va fi un disc, situat în planul focal al lupei. Dacă se așează bucata de hârtie chiar în planul focal al lupei, atunci pe aceasta se va forma un disc luminos cu raza minimă R_0 .

Ținând cont că distanța focală a lupei este f și că diametrul unghiular sub care se vede Soarele este α , raza R_0 a discului luminos format în planul focal al lupei are expresia

$$R_0 \cong \frac{f \cdot \alpha}{2} \quad (26)$$

Notează cu P_c puterea termică provenită de la Soare și colectată de lupa de diametru D

$$P_c = J_s \frac{\pi D^2}{4} \quad (27)$$

Din această putere, bucata de hârtie absoarbe cantitatea P_{abs}

$$P_{abs} = \gamma P_c \quad (28)$$

a cărei expresie se obține din combinarea relațiilor (27) și (28)

$$P_{abs} = \gamma \cdot J_s \cdot \frac{\pi D^2}{4} \quad (29)$$

Reține că această putere revine numai acelei porțiuni din bucata de hârtie care este iluminată de lupă. Masa acestei porțiuni din bucata de hârtie este

$$m = \rho_{\sigma} \pi R_0^2 \quad (30)$$

La momentul de timp $t_0 = 0$, la care începe iluminarea bucății de hârtie cu ajutorul lupei, energia termică inițială U_0 înmagazinată în zona cu aria πR_0^2 din bucata de hârtie aflată la temperatura mediului ambiant T_0 are expresia

$$U_0 = \rho_{\sigma} \pi R_0^2 c T_0 \quad (31)$$

La momentul de timp t de la începerea iluminării bucății de hârtie, temperatura acesteia în zona spotului luminos devine $T(t)$, iar energia termică înmagazinată în respectiva zonă are expresia

$$U(t) = \rho_{\sigma} \pi R_0^2 c T(t) \quad (32)$$

Întrucât

$$\frac{dU}{dt} = P_{abs} \quad (33)$$

se obține

$$U(t) = U_0 + P_{abs} \cdot t \quad (34)$$

Combinând relațiile (31), (32) (33) și (34) rezultă dependența de timp a temperaturii bucății de hârtie în zona spotului luminos

$$T(t) = T_0 + \frac{P_{abs}}{\rho_{\sigma} \pi R_0^2 c} \cdot t \quad (35)$$

Din relația (35) se observă că temperatura $T(t)$ a hârtiei în zona spotului luminos este la un moment dat cu atât mai mare cu cât raza R_0 a spotului luminos este mai mică. Aceasta justifică de ce bucata de hârtie ar trebui așezată chiar în planul focal al lupei.

Intervalul de timp de la începutul focalizării luminii pe bucata de hârtie până la aprinderea acesteia, notat prin $\tau_{aprinde}$ se obține din relația (35), punând condiția ca

$$T = T_{aprinde} \quad (36)$$

Acest interval de timp are expresia

$$\tau_{aprinde} = \frac{\rho_{\sigma} \pi R_0^2 c}{P_{abs}} (T_{aprinde} - T_0) \quad (37)$$

$$\tau_{aprinde} = \frac{\rho_{\sigma} f^2 \alpha^2 c}{\gamma J_S D^2} (T_{aprinde} - T_0) \quad (38)$$

Efectuând calculul numeric, pe baza estimării de mai sus se obține

$$\tau_{aprinde} \cong 0,25 \text{ s} \quad (39)$$

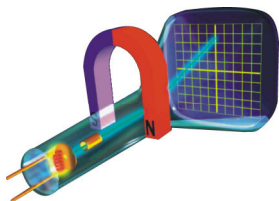
Observații:

Pentru soluționarea punctului G s-au făcut următoarele presupuneri:

- se neglijează absorbția luminii în sticla din care este confecționată lupa
- incidența normală a luminii pe lupă
- temperatura bucății de hârtie se modifică numai în zona în care este lumina focalizată de lupă determină apariția spotului luminos pe hârtie
- restul bucății de hârtie, deși este iluminată direct de la Soare (și absoarbe o anumită putere) nu-și modifică temperatura

Soluție propusă de:

Delia DAVIDESCU – Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar – Ministerul Educației Cercetării și Inovării

**Soluție - Problema a II-a****Rachete balistice**

a. Din geometria desenului, deoarece triunghiul ONF_1 , este dreptunghic isoscel, rezultă:

$$\angle ONF_1 = 45^\circ; \angle ONB = \angle BNF_1 = 22,5^\circ;$$

$$\alpha = 22,5^\circ,$$

reprezentând unghiul dintre direcția lansării rachetei balistice de la polul Nord și direcția orizontului locului, astfel încât racheta să aterizeze într-un punct de pe ecuator.

Se știe că: 1) suma distanțelor de la orice punct al unei elipse până la cele două focare este constantă, $2a$, reprezentând lungimea axei mari a elipsei; 2) tangenta într-un punct la o elipsă este perpendiculară pe bisectoarea unghiului format de direcțiile care trec prin acel punct și prin focarele elipsei (proprietatea optică a elipsei); 3) energia totală a sistemului rachetă – Pământ, atunci când racheta evoluează pe o elipsă cu semiaxa mare a , având Pământul în unul din focare, este $E = -K \frac{mM}{2a}$, unde

K - constanta atracției universale, m - masa rachetei, M - masa Pământului.

Polul Nord fiind un punct de pe elipsă, în acord cu definiția elipsei, rezultă:

$$NF_1 + NF_2 = 2a;$$

$$R \frac{\sqrt{2}}{2} + R = 2a;$$

$$a = \frac{R}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

reprezentând semiaxa mare a elipsei.

În acord cu legea conservării energiei mecanice a sistemului rachetă - Pământ, obținem:

$$\frac{mv_0^2}{2} - K \frac{mM}{R} = -K \frac{mM}{2a};$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2KM}{R(\sqrt{2} + 1)}};$$

$$g_0 = K \frac{M}{R^2}; \quad v_0 = \sqrt{\frac{2g_0 R}{\sqrt{2} + 1}},$$

reprezentând valoarea vitezei rachetei în momentul lansării de la polul Nord, pentru a putea ajunge, în condițiile precizate, într-un punct de pe ecuator.

b. Deoarece apogeul A este un punct de pe elipsă, rezultă:

$$AF_1 + AF_2 = 2a;$$

$$AF_2 = R + h; AF_1 = AF_2 - R \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$h = \frac{R}{2} (\sqrt{2} - 1),$$

reprezentând altitudinea maximă a rachetei în zborul său balistic de la polul Nord până la ecuator.

În acord cu legea conservării energiei mecanice, rezultă:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} - K \frac{mM}{R+h} = -K \frac{mM}{2a};$$

$$v_{\min} = 2 \sqrt{\frac{g_0 R}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 2)}}.$$

c. Din geometria desenului b, rezultă:

$$\angle ONF_1 = 60^\circ; \angle ONB = \angle BNF_1 = 30^\circ;$$

$$\alpha = 30^\circ;$$

$$NF_1 + NF_2 = 2a;$$

$$a = \frac{3}{2} R.$$

Din legea conservării energiei mecanice, rezultă:

$$v_0 = 2 \sqrt{\frac{g_0 R}{3}};$$

$$h = \frac{R}{2} (\sqrt{3} + 1);$$

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2g_0 R(3 - \sqrt{3})}{3(3 + \sqrt{3})}}.$$

d. Cele două rachete se vor deplasa pe orbite eliptice identice, fiecare orbită fiind tangentă la suprafața Pământului într-unul din polii geografici, centrul Pământului fiind în unul din focarele celor două elipse, așa cum indică figura 1. Fiecare rachetă este lansată din perigeul elipsei. Distanța maximă dintre cele două rachete se realizează atunci când fiecare rachetă ajunge în apogeul orbitei sale, ceea ce se întâmplă după un timp $t = T / 2$.

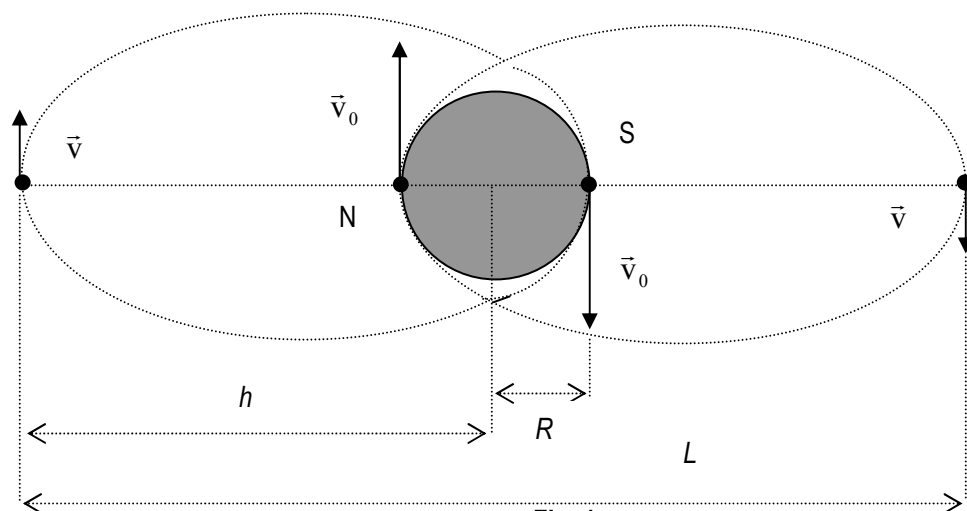


Fig. 1

Pentru mișcarea fiecărei rachete pe traiectoria sa eliptică, în acord cu legea a treia a lui Kepler, putem scrie că:

$$T^2 = k \left(\frac{h+R}{2} \right)^3,$$

relație care dovedește că perioada mișcării este aceeași pentru orice altă rachetă care se deplasează pe orice altă elipsă cu aceeași semiaxă mare, indiferent de semiaxa sa mică, deci, în particular și pentru mișcarea unei rachete pe o traiectorie circulară a cărei rază este:

$$r = \frac{h+R}{2},$$

pentru care putem avea:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{KM}{r}}} = \frac{2\pi r}{R} \sqrt{\frac{r}{g_0}};$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{R^2 g_0 T^2}{4\pi^2}} = \frac{h+R}{2}; \quad h = \sqrt[3]{\frac{2R^2 g_0 T^2}{\pi^2}} - R,$$

astfel încât distanța maximă dintre rachete este:

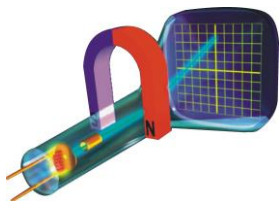
$$L = 2h = 2 \left(\sqrt[3]{\frac{4R^2 g_0 T^2}{\pi^2}} - R \right).$$

e)

Barem de notare

	Parțial	Punctaj
		10
Oficiu		1,00

Soluție propusă de
Prof. dr. Mihail Sandu Călimănești

**Soluție - Problema a III-a****A. Coeficient termic al rezistenței (5 puncte)**

Conductivitatea electrică a materialelor σ în materiale în care conducția electrică este asigurată de electronii liberi depinde direct proporțional de concentrația n a purtătorilor de sarcină electrică și de mobilitatea acestora μ (mobilitatea este coeficientul de proporționalitate dintre viteza de drift a electronilor și intensitatea câmpului electric care determină apariția deplasării ordonate a purtătorilor de sarcină). Lărgimea benzii interzise E_g se definește ca energia necesară unui electron pentru a deveni liber în cristalul semiconductor (prin trecerea de pe cel mai înalt nivel energetic ocupat în banda de valență pe cel mai de jos nivel liber din banda de conducție). Această energie poate fi furnizată termic sau prin alte modalități. Pentru semiconductori puri, concentrația de purtători liberi crește puternic cu temperatura conform relației

$$n \approx T^{3/2} \cdot \exp(-E_g / (2k_B \cdot T)) \quad (1)$$

Tot pentru semiconductori puri, la temperaturi absolute T ridicate mobilitatea scade cu creșterea temperatura

$$\mu \sim T^{-3/2}. \quad (2)$$

În concluzie, rezistența electrică variază cu temperatura. Coeficientul termic al rezistenței α reprezintă variația relativă a rezistenței electrice raportată la o mică variație a temperaturii. Se presupun cunoscute: $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $h = 6,64 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$; $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Pentru germaniu pur, la temperaturi foarte joase, lungimea de undă de prag pentru apariția efectului fotoelectric este $\lambda_{\text{prag}} = 1,7 \mu\text{m}$

1. Determină lărgimea benzii interzise (exprimată în eV) a germaniului pur.
2. Determină coeficientul termic al rezistenței germaniului la temperatura camerei.

Soluție

1. Apariție efectului fotoelectric este legată de „eliberare” electronilor. Deoarece conform enunțului temperatura este foarte scăzută, energia furnizată de fotonii din infraroșu asigură energia necesară electronilor pentru eliberare.

Prin urmare

$$E_g = \frac{hc}{\lambda_{\text{prag}}} \quad (3)$$

Valoarea numerică este

$$\begin{cases} E_g = \frac{6,64 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1,7 \times 10^{-6}} = 1,17 \times 10^{-19} \text{ J} \\ E_g = 0,73 \text{ eV} \end{cases} \quad (4)$$

2. Conductivitatea electrică are expresia

$$\sigma = n \cdot e \cdot \mu = N \cdot T^{3/2} \exp(-E_g / (2k_B \cdot T)) \cdot T^{-3/2} = N \cdot \exp(-E_g / (2k_B \cdot T)) \quad (5)$$

unde N nu depinde de temperatură.

Corespunzător, rezistivitatea electrică a materialului semiconductor intrinsec la temperaturi ridicate are expresia

$$\rho = \kappa^{-1} \cdot \exp(E_g / (2k_B \cdot T)). \quad (6)$$

Rezistența electrică are expresia

$$R = \frac{\ell}{S} \cdot \kappa^{-1} \cdot \exp(E_g / (2k_B \cdot T)) \quad (7)$$

Coeficientul termic al rezistenței se poate scrie ca

$$\alpha = \frac{1}{R(T)} \frac{R(T + \Delta T) - R(T)}{\Delta T} = \frac{1}{R(T)} \cdot \frac{dR}{dT} \quad (8)$$

Cum

$$\frac{dR}{dT} = \frac{\ell}{S} \cdot \kappa^{-1} \cdot \exp(E_g / (2k_B \cdot T)) \cdot \left(-\frac{E_g}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \right) \quad (9)$$

Se poate rescrie coeficientul termic al rezistenței ca

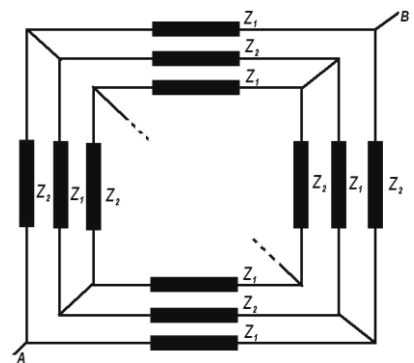
$$\begin{cases} \alpha = \frac{\ell}{S} \cdot \kappa^{-1} \cdot \exp(E_g / (2k_B \cdot T)) \cdot \left(-\frac{E_g}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \right) / \left(\frac{\ell}{S} \cdot \kappa^{-1} \cdot \exp(E_g / (2k_B \cdot T)) \right) \\ \alpha = -\frac{E_g}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \\ \alpha = -\frac{1}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_{\text{prag}}} \end{cases} \quad (10)$$

Valoarea numerică a coeficientului termic este

$$\alpha = -\frac{1}{2 \times 1,38 \times 10^{-23}} \cdot \frac{1}{300^2} \cdot \frac{6,64 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1,7 \times 10^{-6}} \approx -0,047 \text{K}^{-1} \quad (11)$$

B. .. și circuit de curent alternativ (5 puncte)

Rețeaua din figură este alcătuită dintr-un număr care tinde la infinit de celule pătrate având pe laturi impedanțe Z_1 și Z_2 , legate în modul sugerat în desenul alăturat. Consideră situația în care impedanța Z_1 este o bobină (eventual reală) iar impedanța Z_2 este un condensator ideal. Circuitul este legat la o sursă de tensiune electrică alternativă pentru care valoarea instantanee a tensiunii are expresia $u(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ - unde U este o constantă iar pulsația ω poate fi variată. Oricare ar fi valoarea inițială a pulsației, puterea reactivă a circuitului, necunoscută, rămâne neschimbată la dublarea pulsației. Puterea activă a circuitului are valoarea P .



- Determină în funcție de Z_1 și Z_2 expresia impedanței echivalente Z_{AB} a rețelei.
- Determină valoarea puterii reactive a circuitului
- Determină expresiile impedanțelor Z_1 și Z_2 în funcție de P , U și $\omega_0 = 1/\sqrt{C \cdot L}$ (capacitatea C a condensatorului și inductanța L a bobinei care nu sunt cunoscute).

Soluție

- Din invarianța impedanței la adăugarea unei noi celule rezultă că valoarea impedanței circuitului este

$$Z_{\text{echivalent}}^2 = Z_1 \cdot Z_2$$

dacă

$$\begin{cases} \overline{Z_1} = R + jL\omega \\ \overline{Z_2} = -j/(C \cdot \omega) \\ \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} = \frac{L}{C} - j \frac{R}{C \cdot \omega} \end{cases} \quad (12)$$

iar

$$\overline{Z_{echivalent}} = R_e + X_e \cdot j \quad (13)$$

rezultă că

$$\begin{cases} \frac{L}{C} = R_e^2 - X_e^2 \\ -\frac{R}{C \cdot \omega} = 2R_e \cdot X_e \end{cases} \quad (14)$$

Ridicând la pătrat relațiile rezultă

$$\begin{cases} \left(\frac{L}{C}\right)^2 = R_e^4 + X_e^4 - 2R_e^2 \cdot X_e^2 \\ \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2 = 4R_e^2 \cdot X_e^2 \end{cases} \quad (15)$$

și în consecință

$$(R_e^2 + X_e^2) = \sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2} \quad (16)$$

astfel că

$$\begin{cases} R_e = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2} + \frac{L}{C} \right)} \\ X_e = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2} - \frac{L}{C} \right)} \end{cases} \quad (17)$$

b. Puterea reactivă are expresia

$$P_{\text{reactiv}} = \text{Im} \frac{U^2}{\overline{Z_{echivalent}}} = \text{Im} \frac{U^2}{R_e + X_e \cdot j} = \text{Im} \frac{U^2(R_e - X_e \cdot j)}{R_e^2 + X_e^2} = \frac{-U^2 X_e}{R_e^2 + X_e^2} \quad (18)$$

$$P_{\text{reactiv}} = \frac{-U^2 X_e}{R_e^2 + X_e^2} = \frac{-U^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2} - \frac{L}{C} \right)}}{\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot \omega}\right)^2}} \quad (19)$$

Dublarea frecvenței conduce la o nouă expresie a puterii reactive

$$P_{\text{reactiv}}(2\omega) = \frac{-U^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot 2\omega}\right)^2} - \frac{L}{C} \right)}}{\sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C \cdot 2\omega}\right)^2}} \quad (20)$$

Care nu poate conduce la o aceeași valoare decât dacă

$$\frac{R}{C \cdot 2\omega} \equiv \frac{R}{C \cdot \omega} \quad (21)$$

ceea ce este posibil *numai* dacă

$$R \equiv 0 \quad (22)$$

Bobina din circuit este – prin urmare – ideală.

Impedanța echivalentă a circuitului este pur rezistivă și are valoarea

$$\overline{Z}_{\text{echivalent}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (23)$$

independentă de frecvență.

Puterea reactivă a circuitului este nulă pentru oricare frecvență.

$$P_{\text{reactiv}}(\omega) = 0 \text{ Var} \quad (24)$$

Puterea activă a circuitului are expresia

$$P = \frac{U^2}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (25)$$

Se poate scrie că

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U^2}{P} \\ \sqrt{C \cdot L} = 1/\omega_0 \end{cases} \quad (26)$$

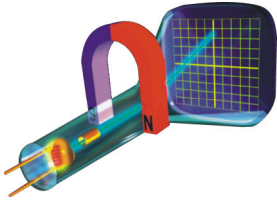
astfel că

$$\begin{cases} L = \frac{U^2}{P \cdot \omega_0} \\ C = \frac{P}{U^2 \cdot \omega_0} \end{cases} \quad (27)$$

Soluție propusă de

Dr. Constantin COREGA , Liceul Emil Racoviță Cluj - Napoca

Dr. Adrian DAFINEI, Facultatea de Fizică, Universitatea din București



Soluție - Problema a IV'-a

a. (Total 5 puncte) Să evaluăm diferența de drum optic a razelor R_e și T , de la frontul LM la frontul KN (vezi figura 4).

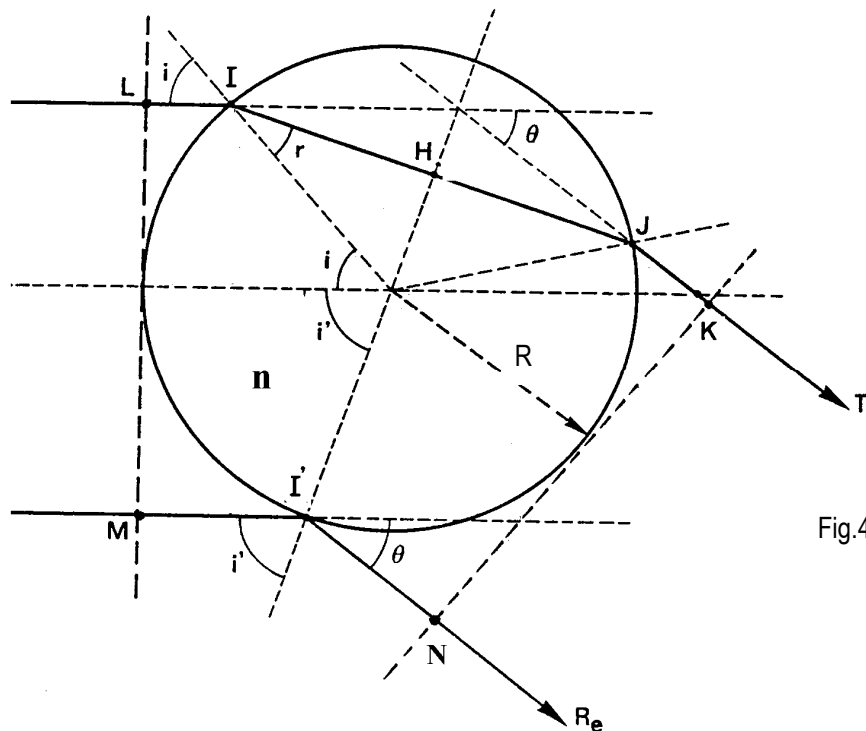


Fig.4

Desen corect,

Avem $(\Delta) = |LI| + 2n \cdot |IH| + |JK| - (2|MI'| + \lambda/2)$, unde $|LI| = |JK| = R(1 - \cos i)$, $|IH| = |HJ| = R \cos r$, cu $\sin i = n \sin r$. Pe de altă parte, $|MI'| = |I'N| = R(1 - \cos i')$1,5 puncte

Contribuția de $(\lambda/2)$ este datorată reflexiei din I'0,25 puncte

Avem în vedere următoarele relații dintre unghiuri: $2i' + \theta = 180^\circ$, adică $i' = 90^\circ - \theta/2$, respectiv $i = \theta + [180^\circ - (i' + 180^\circ - 2r)] = \theta - i' + 2r$, adică $2i = \theta + 2r$ sau $i = r + \theta/2$0,5 puncte

Ținând cont de legea refracției obținem $\cos i = [n \cos(\theta/2) - 1] / \sqrt{1 + n^2 - 2n \cos(\theta/2)}$ și $\cos r = [n - \cos(\theta/2)] / \sqrt{1 + n^2 - 2n \cos(\theta/2)}$. De asemenea $\cos i' = \cos(90^\circ - \theta/2) = \sin(\theta/2)$0,5 puncte.

Cu $R = D/2$ și notând $f(n, \theta) = \sin(\theta/2) + \sqrt{n^2 + 1 - 2n \cos(\theta/2)}$, diferența de drum optic (Δ) a razelor R_e și T care interferează la infinit este dată de formula $(\Delta) = 2R \cdot f(n, \theta) - \lambda/2 = D \cdot f(n, \theta) - \lambda/2$0,5 puncte.

Observăm că fiecărei valori concrete a unghiului de împrăștiere θ îi corespunde o anumită stare de interferență (maxim – când (Δ) este un număr par de $\lambda/2$, sau minim – când (Δ) este un număr impar de $\lambda/2$).

.....0,5 puncte

Interfranja unghiulară este $\delta\theta$ și ei îi corespunde o variație de drum optic $\delta(\Delta) = \lambda$. Dacă $\delta\theta$ se cuprinde de N ori în intervalul unghiular dintre θ_m și θ_M înseamnă că lungimea de undă λ se cuprinde tot de N ori în diferența de drum optic $(\Delta)_M - (\Delta)_m$. Putem scrie $N\lambda = (\Delta)_M - (\Delta)_m = D \cdot [f(n, \theta_M) - f(n, \theta_m)]$, astfel că formula generală solicitată în enunțul problemei are $D = N\lambda / [f(n, \theta_M) - f(n, \theta_m)]$0,75 puncte

b). (în total 2,5 puncte) Logaritmăm natural relația obținută în ambele părți, după care o diferențiem. Obținem $\ln D = \ln N + \ln \lambda - \ln[f(n, \theta_M) - f(n, \theta_m)]$ și $\frac{dD}{D} = \frac{dN}{N} + \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{d[f(n, \theta_M) - f(n, \theta_m)]}{[f(n, \theta_M) - f(n, \theta_m)]}$. Deoarece N și λ se cunosc exact punem $dN = d\lambda = 0$ **1 punct**

În sensul calculului erorilor, în cel mai rău caz, avem $\varepsilon_D = \frac{\delta D}{D} = \frac{\delta[f(n, \theta_M) + f(n, \theta_m)]}{f(n, \theta_M) - f(n, \theta_m)}$, unde, cu teorema creșterilor finite,

scriem $\delta f = (df/d\theta)\delta\theta$ **0,5 puncte**

Deoarece, în intervalul (θ_m, θ_M) , funcția $f(n, \theta)$ crește „destul de liniar” vom putea scrie $f(n, \theta_M) - f(n, \theta_m) \approx K(\theta_M - \theta_m)$, $K = \text{const}$ fiind panta dependenței liniare (panta dreptei) și $df/d\theta \approx K$. Astfel obținem

$$\varepsilon_D = \frac{\delta D}{D} = \frac{\delta(\theta_M + \theta_m)}{\theta_M - \theta_m} = \frac{2\delta\theta}{\theta_M - \theta_m}. \dots\dots\dots \mathbf{0,5 \text{ puncte}}$$

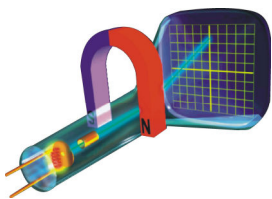
Conform enunțului $\delta\theta = \frac{1}{6} \cdot \frac{\theta_M - \theta_m}{N}$ și deci $\varepsilon_D = \frac{1}{3N}$. Așadar, este preferabil ca intervalul unghiular (θ_m, θ_M) să fie cât mai mare, pentru ca N să fie mare..... **0,5 puncte**

c). (în total 1,5 puncte) Cu formula generală dedusă, găsim $D = 192,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Pe de altă parte, $\varepsilon_D = 1,25 \cdot 10^{-3}$, adică $\delta D = 0,24 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Astfel $D = (192,7 \pm 0,24) \mu\text{m}$ **1,5 puncte**

Se acordă din oficiu **1 (un) punct**

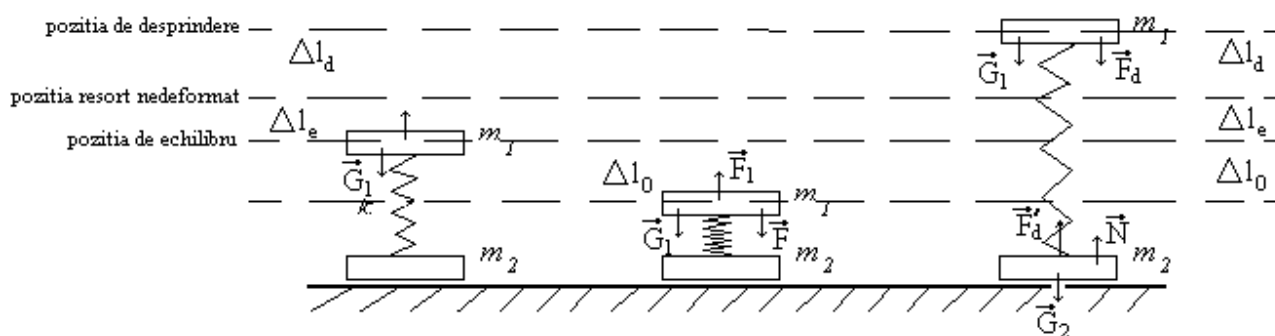
TOTAL GENERAL..... **10(zece) puncte**

Propunător
Prof.univ.dr. Uliu Florea
Facultatea de Fizică
Universitatea din Craiova



Soluție - Problema a V - a

Plăci săltărețe



Forța minimă

$$a) F_e = G_1 \quad \rightarrow \quad k \Delta l_e = m_1 g \quad \rightarrow \quad \Delta l_e = \frac{m_1 g}{k}$$

$$b) F + G_1 = F_1 \quad \rightarrow \quad F = k(\Delta l_e + \Delta l_0) - m_1 g \quad \rightarrow \quad F = k \Delta l_0$$

c) Condiția de desprindere

$$F_d + N = G_2 \quad \rightarrow \quad N = G_2 - F_d = m_2 g - k \Delta l_d = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta l_d = \frac{m_2 g}{k}$$

d) Din conservarea energiei $E_i = E_d$ unde

$$E_i^{(1)} = \frac{m_1 v_{i0}^2}{2} + \frac{k}{2} (\Delta l_e + \Delta l_0)^2 - m_1 g (\Delta l_e + \Delta l_0)$$

$$E_d^{(1)} = \frac{m_1 v_d^2}{2} + \frac{k}{2} (\Delta l_d)^2 + m_1 g \Delta l_d$$

Cu $v_{i0} = 0$, rezulta

$$\frac{m_1}{2} v_d^2 = (\Delta l_e + \Delta l_0 + \Delta l_d) \left[\frac{k}{2} (\Delta l_e + \Delta l_0 - \Delta l_d) - m_1 g \right]$$

Conditia $v_d^2 \geq 0$ duce la

$$\frac{k}{2}(\Delta l_e + \Delta l_0 - \Delta l_d) - m_1 g \geq 0$$

Sau

$$\Delta l_0 \geq \frac{2m_1 g}{k} - \Delta l_e + \Delta l_d$$

Se obtine

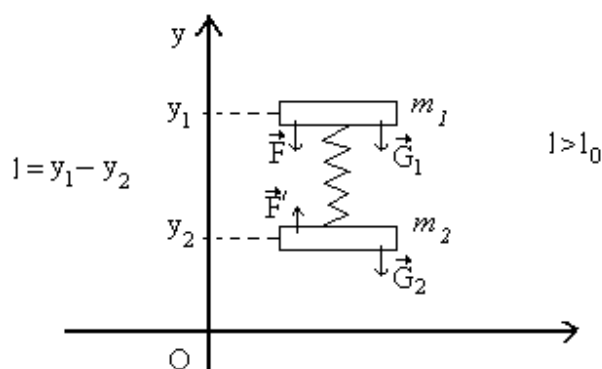
$$F \geq (m_1 + m_2)g$$

1) In cazul in care $F' = nF = n(m_1 + m_2)g$ din conservarea energiei rezulta

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{2} v_{1d}^2 &= (\Delta l_e + \Delta l_0 + \Delta l_d) \left[\frac{k}{2} (\Delta l_e + \Delta l_0 - \Delta l_d) - m_1 g \right] = \\ &= \left(\frac{m_1 g}{k} + \frac{n(m_1 + m_2)g}{k} + \frac{m_2 g}{k} \right) \left[\frac{k}{2} \left(\frac{m_1 g}{k} + \frac{n(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_2 g}{k} \right) - m_1 g \right] = \frac{g^2 (m_1 + m_2)^2}{2k} (n^2 - 1) \end{aligned}$$

$$V_{1d} = (m_1 + m_2)g \sqrt{\frac{n^2 - 1}{m_1 k}}$$

2)



Din Legea a IIa:

$$m_1 a_{1y} = -k(l - l_0) - m_1 g$$

$$m_2 a_{2y} = k(l - l_0) - m_2 g$$

Adunand cele doua ecuatii:

$$m_1 a_{1y} + m_2 a_{2y} = -(m_1 + m_2)g$$

se obtine:

$$a_y^{cm} = \frac{m_1 a_{1y} + m_2 a_{2y}}{m_1 + m_2} = -g$$

Atunci

$$v_y^{cm} = v_{0y}^{cm} - gt$$

$$y^{cm} = y_0^{cm} + v_{0y}^{cm} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Respectiv

$$(v_y^{cm})^2 = (v_{0y}^{cm})^2 - 2g(y^{cm} - y_0^{cm})$$

Cum

$$v_y^{cm} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}}{m_1 + m_2}$$

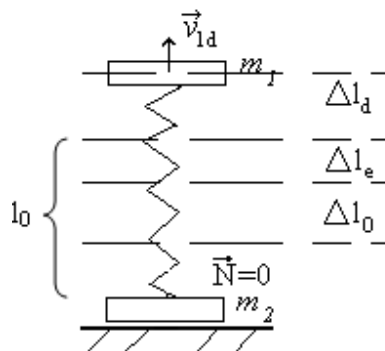
Atunci

$$v_{0y}^{cm} = \frac{m_1 v_{1d} + 0}{m_1 + m_2} = m_1 g \sqrt{\frac{n^2 - 1}{m_1 k}}$$

Din $v_y^{cm} = 0$

Rezulta

$$\Delta h_{cm} = \frac{(v_{0y}^{cm})^2}{2g} = \frac{1}{2g} m_1^2 g^2 \frac{n^2 - 1}{m_1 k} = \frac{m_1 g}{2k} (n^2 - 1)$$



3)

$$a_{1y} - a_{2y} = \frac{-k(y_1 - y_2 - l_0) - m_1 g}{m_1} - \frac{k(y_1 - y_2 - l_0) - m_2 g}{m_2} = -k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (y_1 - y_2 - l_0)$$

Notand elongatia $u_y = l - l_0 = y_1 - y_2 - l_0$,

respectiv masa redusa $m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ atunci

$$\frac{d^2 u_y}{dt^2} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \frac{d^2 y_2}{dt^2} = a_{1y} - a_{2y}$$

Si deci se obtine

$$\frac{d^2 u_y}{dt^2} = -\frac{k}{m_r} u_y$$

$$u_y(t) = A \sin(\omega t + \gamma)$$

$$\frac{du_y}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \gamma)$$

Astfel incat

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Din conditiile initiale la momentul $t=0$ (desprinderea):

$$A \sin \gamma = u_y(0) = \Delta l_d$$

$$\omega A \cos \gamma = v_{ly}(0) - v_{2y}(0) = v_{ld}$$

$$A \sin \gamma = \Delta l_d$$

$$A \cos \gamma = \frac{v_{ld}}{\omega}$$

$$A = \sqrt{(\Delta l_d)^2 + \frac{v_{ld}^2}{\omega^2}}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{m_2 g}{k}\right)^2 + \frac{m_1 \cdot m_2}{k(m_1 + m_2)} \frac{(m_1 + m_2)^2 g^2}{m_1 k} (n^2 - 1)} = \frac{m_2 g}{k} \sqrt{1 + (n^2 - 1) \frac{m_1 + m_2}{m_2}}$$

4)

$$\tau = t_u^{cm} = \frac{v_{cm}^o}{g} = \sqrt{\frac{m_1}{k} (n^2 - 1)}$$

$$N = \left[\frac{\tau}{T} \right]_- = \left[\frac{\sqrt{\frac{m_1}{k} (n^2 - 1)}}{2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}} \right]_- = \left[\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2} (n^2 - 1)} \right]_-$$

Soluție propusă de

Conferențiar universitar dr. Cristian CIUCU, Facultatea de Fizică, Universitatea din București

Conferențiar universitar dr. Igor EVTODIEV, Facultatea de Fizică, Universitatea de Stat din Moldova