OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a IX-a

Problema 1. Rezolvaţi ecuaţia $13\{x\}^2 - 1013x + 2013\{x\} = 0$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului x.

Manuela Stroie şi Iulian Stroie, Balş

Problema 2. În planul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele P şi Q astfel încât $\overrightarrow{DP} = p \cdot \overrightarrow{DC}$ şi $\overrightarrow{BQ} = q \cdot \overrightarrow{BC}$, unde $p, q \in \mathbb{R}$.
Arătaţi că punctele A, P şi Q sunt coliniare dacă şi numai dacă $pq = 1$.

Titu Vîrban, Caracal

Problema 3. Fie progresiile aritmetice $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$. Arătaţi că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$, definit prin $z_n = x_n \cdot y_n$, este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă cel puţin una dintre progresiile $(x_n)_{n\geq 1}$ sau $(y_n)_{n\geq 1}$ este constantă.

Dan Brânzei

Problema 4. Fie H ortocentrul şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Se notează cu O_a, O_b , O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HCA, respectiv HAB.
Arătaţi că $\overrightarrow{OO_a} + \overrightarrow{OO_b} + \overrightarrow{OO_c} = 2\overrightarrow{OH}$.

Costel Anghel, Scorniceşti

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a X-a

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\sqrt[3]{3\cdot 2^x-6}+\sqrt[3]{2\cdot 2^x-4}=\sqrt[3]{3\cdot 2^x-4}+\sqrt[3]{2\cdot 2^x-6}.$$

B.T.S.

Problema 2. Se consideră numerele $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, astfel încât $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$.

a) Demonstraţi că $|z_1+z_2+z_3| \in \mathbb{N}$.

b) Determinaţi numerele date dacă $z_1 \cdot z_2 = 1$ şi $z_3 \in \mathbb{R}$.

Iacob Didraga

Problema 3. Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} \log_2 x_1 = \log_5(x_2+x_3+1) \\ \log_2 x_2 = \log_5(x_3+x_1+1) \\ \log_2 x_3 = \log_5(x_1+x_2+1) \end{cases}$.

Dorel Barbu, Timişoara

Problema 4. Determinaţi funcţiile bijective $f:[0,1]\to[0,1]$ cu proprietatea că

$$f\left(2x-f(x)\right)=x, \text{ pentru orice } x\in[0,1].$$

Dincă Pepino, Caracal

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 + 4A + 2013I_2 = \begin{pmatrix} 2018 & 7 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$.

Arătaţi că $(A - I_2)^p = O_2$, pentru orice număr natural $p \geq 2$.

Gabriela Ionică şi Eduard Buzdugan, Slatina

Problema 2. Se consideră mulţimea G formată din toate matricele de ordin 3, cu elementele din mulţimea $\{-1,1\}$, astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie, respectiv coloană, este egal cu -1.

a) Demonstraţi că numărul elementelor egale cu -1 ale unei matrice din G este 3, 5 sau 9.

b) Demonstraţi că dacă o matrice $A \in G$ este inversabilă, atunci $A^{-1} \notin G$.

c) Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei $f : G \to \mathbb{R},\ f(X) = \det X$.

S.L.T.

Problema 3. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - n\right)$.

[***]

Problema 4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0 = x \in \mathbb{R}$ şi $a_n = \frac{1}{n} - a_{n-1}$, pentru orice $n \geq 1$.

Determinaţi valorile lui x pentru care şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Florian Dumitrel, Slatina

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $a>0,\ a\neq 1$. Calculaţi integrala

$$I=\int_0^1 a^{x^3+3x}\cdot \ln a^{x^5+4x^3+3x}dx.$$

Titu Vîrban, Caracal

Problema 2. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/4}\cos x\cdot\cos x^n\,dx.$$

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 3. a) Se consideră inelele finite A_1 şi A_2 cu proprietatea că numărul elementelor inversabile din A_1 este diferit de numărul elementelor inversabile din A_2. Arătaţi că cele două inele nu sunt izomorfe.

b) Daţi exemplu de două inele finite cu acelaşi număr de elemente inversabile.

Mihai George, Slatina

Problema 4. Fie mulţimea $Q_0=\left\{\frac{m}{n}\,|\,m,n\in\mathbb{Z},\ m,n \text{ impare}\right\}$ şi $G=Q_0\times\mathbb{Z}$. Pe G se defineşte legea de compoziţie: $(q_1,k_1)*(q_2,k_2)=(q_1q_2,k_1+k_2),\ \forall q_1,q_2\in Q_0,\ \forall k_1,k_2\in\mathbb{Z}$.

a) Calculaţi $(1,1)*(1,2)*\ldots*(1,10)$.

b) Arătaţi că $(G,*)$ este grup abelian.

c) Arătaţi că grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ sunt izomorfe.

S.L.T.

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.