

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală - 6 martie 2022

(recalificare)

CLASA a X-a – enunțuri

Timp de lucru 180 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $^{9x+1}\sqrt{12x} = ^{3-3x}\sqrt{6x}$, stabiliți care dintre următoarele numere este pătratul unui număr natural:

- A $6x^2$ B $9x^2$ C $8x^3$ D $12x^2$ E $12x^3$

2. Știind că $a = \log_2 75$ și $b = \log_2 15$, numărul $c = \log_2 40$ este egal cu:

- A $a - b + 3$ B $a + b - 3$ C $3 - a + b$ D $1 - a - 2b$ E $3 - 2a + b$

3. Se consideră expresia $E(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ și numărul $w = 1 + \sqrt[3]{3}$. Numărul $E(w)$ este egal cu:

- A 4 B 6 C $6\sqrt[3]{3}$ D $\sqrt[3]{9}$ E 7

4. Se consideră numerele $x_k = (\sqrt[4]{3})^{60-k} \cdot (\sqrt[3]{2})^k$, $k = \overline{0, 60}$. Numărul numerelor iraționale, din mulțimea $M = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{60}\}$, este egal cu:

- A 55 B 54 C 6 D 7 E 31

5. Partea întreagă a numărului $a = \log_2 3 + \log_9 25 + \log_{25} 64$ este egală cu:

- A 2 B 3 C 4 D 5 E 6

6. Se consideră o funcție injectivă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că există un număr real a astfel încât: $f(x) \cdot f(2-x) = f(a \cdot x - 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Numărul $f(4)$ este egal cu:

- A 2 B 0 C 1 D -1 E 4

7. Cel mai mic număr întreg m , pentru care funcția $f : [m, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (m-7) \cdot x + 6$, este injectivă, este egal cu:

- A 1 B 3 C 2 D 0 E -1

8. Ordinea crescătoare a numerelor $m = \log_3 5$, $n = \log_9 26$, $p = 2 \cdot \log_3 2$ este:

- A p, m, n B m, n, p C m, p, n D p, n, m E n, p, m

9. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$, este surjectivă, atunci numărul $c = 6a + 4b$ este egal cu:

- A 2 B 3 C 0 D 4 E 1

10. Dacă $a, b, c \in (0, +\infty)$, iar $a^2 + b^2 = 7ab$ și $\frac{\lg a + \lg b}{2} = \lg \frac{a+b}{c}$, atunci numărul c este egal cu:

- A 5 B 4 C 9 D 2 E 3

11. Produsul soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{2+x} - \sqrt[3]{x-1} = 1$ este egal cu:

- A -6 B 8 C -10 D 2 E -14

12. Dacă $a > 1$ este număr real astfel încât $a^4 + \frac{1}{a^4} = \frac{6562}{81}$, atunci numărul $b = a - \frac{1}{a}$ este egal cu:

- A $\frac{1}{6}$ B $\frac{5}{6}$ C $\frac{7}{6}$ D $\frac{8}{3}$ E $\frac{7}{12}$

13. Dacă (x_1, x_2, x_3) este o soluție a sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} \log_4(1+x_1) = \log_9(1+x_2+x_3) \\ \log_4(1+x_2) = \log_9(1+x_3+x_1) \\ \log_4(1+x_3) = \log_9(1+x_2+x_1) \end{cases}$$

pentru care $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, atunci partea întreagă a numărului $T = \sqrt[3]{3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3}$ este egală cu:

A -2 B -3 C -1 D 0 E 1

14. Dacă $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a \leq b$, este soluție a sistemului de ecuații $\begin{cases} 16^x + 5x = y + 3 \\ 16^y + 5y = x + 3 \end{cases}$, atunci

numărul $M = \frac{a+b}{a \cdot b}$ este egal cu:

A $\frac{1}{2}$ B 2 C $\frac{1}{4}$ D 8 E $\frac{1}{8}$

15. Suma soluțiilor reale ale ecuației $4 + 8^x \cdot \log_2 x = 2^{3x+1} + \log_2(x^2)$ este egală cu:

A $\frac{4}{3}$ B $\frac{13}{3}$ C $\frac{9}{2}$ D 8 E 4

16. Cel mai mare număr întreg k , pentru care inegalitatea $\log_{\frac{k}{k+1}}(x^2 + 2) > 1$ este adevărată pentru orice număr real x , este egal cu:

A -4 B -2 C -3 D 0 E 1

17. Dacă $a, b, c \in (1, +\infty)$ și $a + b + c = 8$, atunci valoarea minimă a expresiei

$E = \frac{\log_a b}{a+b} + \frac{\log_b c}{b+c} + \frac{\log_c a}{c+a}$ este egală cu:

A $\frac{3}{16}$ B $\frac{3}{4}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{9}{16}$ E $\frac{9}{8}$

18. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție crescătoare cu proprietatea că

$f(f(x)) + f(x) = 2x - 6, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci numărul $P = f\left(\frac{1}{5}\right) \cdot f\left(\frac{2}{5}\right) \cdot f\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{2022}{5}\right)$ este egal cu:

A 3 B 401 C 0 D 401! E 2022!

19. Funcția bijectivă $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4^x + \log_2 x$, are inversa g .

Numărul $s = g(1) + g(17)$ este egal cu:

A -1 B $\frac{1}{2}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{5}{2}$ E $\frac{3}{4}$

20. Se consideră mulțimea $\mathcal{S}(a) = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geq \frac{3}{4}\right\}$. Numărul elementelor mulțimii $\mathcal{D} = \mathcal{S}(2022) \setminus \mathcal{S}(2048)$ este egal cu:

A 27 B 26 C 0 D 1026 E 13

21. Numărul elementelor mulțimii $\mathcal{A} = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid \sin \frac{n\pi}{2} + \log_2(n) \leq 3\right\}$ este egal cu:

A 8 B 9 C 4 D 7 E 6

22. Se consideră funcțiile $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 3^x + 1$,

$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = 2022 + x^{2021}$, $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \left|x^2 + 2x - 3\right|$,

$f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 4 \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4 \end{cases}$,

Dintre cele considerate, funcțiile surjective sunt:

A f_1, f_3 **B** f_2, f_4 **C** f_1, f_4 **D** f_2, f_3 **E** f_1, f_2

23. Se consideră funcțiile $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = 3^x + 1$,
 $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = 2022 + x^{2021}$, $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3(x) = |x^2 + 2x - 3|$,

$$f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = \begin{cases} x + 1, x \leq 4 \\ 3 + \sqrt{x}, x > 4 \end{cases},$$

Dintre cele considerate, funcțiile injective sunt:

A f_1, f_2, f_4 **B** f_1, f_3, f_4 **C** f_1, f_2, f_3 **D** doar f_2, f_3 **E** doar f_1, f_3

24. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, iar $\sqrt{3x + y} + \sqrt{y - x} = 4$ și $2x + \sqrt{y - x} = 5$, atunci numărul $w = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ este egal cu:

A $\frac{13}{49}$ **B** $\frac{7}{36}$ **C** $\frac{13}{36}$ **D** $\frac{7}{18}$ **E** $\frac{13}{25}$