

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 1.02.2020
Clasa a X-a

1. (7p) Arătați că numărul $\frac{5}{1-3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}} - \frac{17}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}} - 2\sqrt[3]{2}$ este natural.

2. (7p) Știind că $a, b, c \in (1, +\infty)$, demonstrați că

$$\log_a \frac{a+b+c}{3} + \log_b \frac{a+b+c}{3} + \log_c \frac{a+b+c}{3} \geq 3.$$

3. Se consideră funcția $f: R \rightarrow R$ cu proprietatea $(f \circ f)(x) = x^2$ pentru orice $x \in R$.

a) (4p) Poate fi funcția f injectivă? Dar surjectivă?

b) (3p) Dați un exemplu de funcție cu proprietatea dată.

4. Numerele complexe z_1, z_2 îndeplinesc condițiile $|z_1| = |z_2|$, $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ și $|z_1 - z_2| = 1$.

a) (3p) Arătați că $|z_1| = 1$.

b) (4p) Calculați $\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Im} z_2 - \operatorname{Re} z_2 \cdot \operatorname{Im} z_1$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.