

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10.02.2024

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Să se calculeze:

$$\text{a) } \int \frac{2 - \cos^2 x + \sin 2x}{1 + e^{-x} + \sin^2 x} dx; \quad \text{b) } \int_0^\pi \arcsin(\cos^{2023} x) dx.$$

PROBLEMA 2. Fie G un grup cu 10 elemente, cu elementul neutru e . Să se arate că dacă există două elemente distincte $a, b \in G \setminus \{e\}$, astfel încât $a^2 = b^2 = e$, atunci grupul G nu este abelian.

PROBLEMA 3. Să se determine funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care mulțimea

$$G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

are o structură de grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

PROBLEMA 4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f . Să se arate că nu există $a, b \in \mathbb{R}^*$, astfel încât

$$f(ax - bF(x)) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.