



Olimpiada Națională de Matematică 2017

Etapa locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA A XII-A

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ. Dacă $a \in G$, se definește funcția $f_a : G \rightarrow G$, $f_a(x) = axa^{-1}$.
 - a) Să se demonstreze că f_a este automorfism al grupului $(G, \cdot)$ pentru orice $a \in G$.
 - b) Să se demonstreze că mulțimea $\text{Int}(G) = \{f_a \mid a \in G\}$ este subgrup al grupului $(\text{Aut}(G), \circ)$.
2. Fie $(G, \cdot)$ un monoid comutativ, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \neq q$ și $a \in G$ un element inversabil. Dacă ecuațiile $x^p = a$ și $x^q = a$ au soluții în G , să se arate că ecuația $x^n = a$ are soluție în G , unde $n = c.m.m.c.\{p, q\}$.
3. a) Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x} \cdot \cos x & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$
admite proprietatea lui pe $\mathbb{R}$.
b) O funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, verifică relația:
$$f''(x) = 2f(x) \cdot f'(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$
Calculați $I = \int (f'(x))^2 \cdot f(x) dx$ în funcție de $f'(x)$.
4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și numerele reale a și b , $a < b$, astfel încât:
$$\int_a^b f(a+b+t-x) dx \geq \int_a^b f(x) dx, \forall t \in \mathbb{R}.$$
Demonstrați că $f(a) = f(b)$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.