



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA a VII-a

Problema 1.

Fie m și n două numere naturale nenule cu proprietatea $0,33 < \frac{m}{n} < 0,34$.

- Dacă $n = 900$, determinați valorile posibile ale lui m .
- Dacă $m = 900$, aflați câte numere n au proprietatea considerată.
- Determinați numerele m și n , astfel încât m să aibă valoarea minimă.

Problema 2.

Fie x un număr real astfel încât $2000 \leq x \leq 2018$.

- Găsiți trei valori ale lui x pentru care numărul $\sqrt{(2018-x)(x-2000)}$ este rațional.
- Determinați toate valorile întregi ale lui x pentru care numărul $\sqrt{\frac{2018-x}{x-2000}}$ este întreg.
- Aflați valoarea maximă a sumei $\sqrt{2018-x} + \sqrt{x-2000}$.

Problema 3.

Se consideră trapezul $ABCD$ cu baza mare AD . Bisectoarele exterioare ale unghiurilor A și B se intersectează în punctul P , iar bisectoarele exterioare ale unghiurilor C și D se intersectează în punctul Q . Fie R mijlocul segmentului AB și S mijlocul segmentului CD .

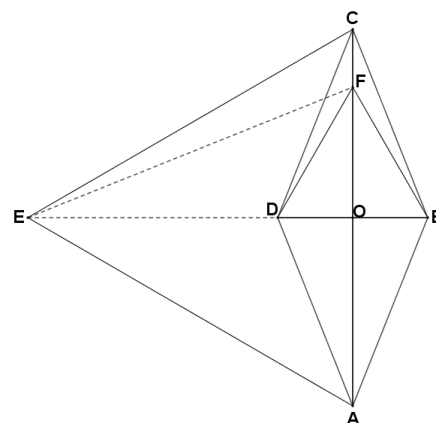
Demonstrați că:

- punctele P , R și S sunt coliniare.
- lungimea segmentului PQ este egală cu jumătate din perimetrul trapezului $ABCD$.

Problema 4.

Se consideră rombul $ABCD$, de centru O și triunghiurile echilaterale ACE și BDF , astfel încât $D \in (EO)$ și $F \in (CO)$.

- Calculați $m(\angle AFD) + m(\angle FAE)$.
- Demonstrați că $AD \perp EF$ și $BF \perp CE$.
- Demonstrați că $AO \cdot FO = BO \cdot EO$.



Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapă locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA a VII-a

Barem de corectare

Problema 1.

Fie m și n două numere naturale nenule cu proprietatea $0,33 < \frac{m}{n} < 0,34$.

- a) Dacă $n = 900$, determinați valorile posibile ale lui m .
- b) Dacă $m = 900$, aflați câte numere n au proprietatea considerată.
- c) Determinați numerele m și n , astfel încât m să aibă valoarea minimă.

Soluție și barem:

a) $\frac{33}{100} < \frac{m}{900} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 297 < m < 300 \Leftrightarrow m \in \{298, 299\}$3 puncte

b) $\frac{33}{100} < \frac{900}{n} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2700 < n < \frac{90000}{33} = 2727 \frac{3}{11} \Leftrightarrow m \in \{2701, 2702, \dots, 2727\}$.

Sunt 27 de numere n care au proprietatea considerată.....2 puncte

c) Avem $\frac{33}{100} < \frac{m}{n} \Rightarrow 100m \geq 33n + 1$ și $\frac{m}{n} < \frac{1}{3} \Rightarrow n \geq 3m + 1$, deci $100m \geq 33(3m + 1) + 1 \Rightarrow m \geq 34$.

Pentru $m = 34$, avem $n \leq \frac{3400 - 1}{33} = 103$ și $n \geq 3 \cdot 34 + 1 = 103$, așadar $n = 103$.

Evident, $\frac{33}{100} < \frac{34}{103} < \frac{1}{3}$. Prin urmare, $m = 34$ și $n = 103$ 2 puncte

Problema 2.

Fie x un număr real astfel încât $2000 \leq x \leq 2018$.

a) Găsiți trei valori ale lui x pentru care numărul $\sqrt{(2018 - x)(x - 2000)}$ este rațional.

b) Determinați toate valorile întregi ale lui x pentru care numărul $\sqrt{\frac{2018 - x}{x - 2000}}$ este întreg.

c) Aflați valoarea maximă a sumei $\sqrt{2018 - x} + \sqrt{x - 2000}$.



Soluție și barem:

a) $x_1 = 2000$, $x_2 = 2009$, $x_3 = 2018$ 3 puncte

b) Numărul $\sqrt{\frac{2018-x}{x-2000}}$ este întreg dacă și numai dacă există un număr natural n astfel încât

$$\frac{2018-x}{x-2000} = n^2. \text{ Așadar } (x-2000) \mid (2018-x), \text{ sau } (x-2000) \mid (2018-x+x-2000), \text{ deci } (x-2000) \mid 18,$$

adică $x \in \{2001, 2002, 2003, 2006, 2009, 2018\}$.

Valorile care verifică relația din enunț sunt $x_1 = 2009$ și $x_2 = 2018$ 2 puncte

$$c) \left(\sqrt{2018-x} + \sqrt{x-2000} \right)^2 = 18 + 2\sqrt{(2018-x)(x-2000)} \leq 18 + 2 \cdot \frac{2018-x+x-2000}{2} = 36.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $2018-x = x-2000$, adică $x = 2009$.

Valoarea maximă a sumei considerate este 6 (se atinge pentru $x = 2009$)2 puncte

Problema 3.

Considerăm trapezul $ABCD$ cu baza mare AD . Bisectoarele exterioare ale unghiurilor A și B se intersectează în punctul P , iar bisectoarele exterioare ale unghiurilor C și D se intersectează în punctul Q . Fie R mijlocul segmentului AB și S mijlocul segmentului CD .

Demonstrați că:

- punctele P , R și S sunt coliniare.
- lungimea segmentului PQ este egală cu jumătate din perimetrul trapezului $ABCD$.

Soluție și barem:

a) Unghiurile A și B sunt suplementare, așadar bisectoarele lor exterioare sunt perpendiculare, adică $m(\angle APB) = 90^\circ$.

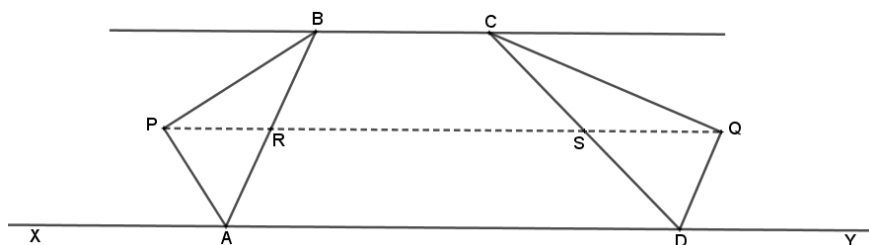
Cum PR este mediana corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic

APB , rezultă că $PR = \frac{AB}{2} = AR$, deci

$\angle RPA \equiv \angle RAP \equiv \angle PAX$, de unde obținem $PR \parallel AD$. Deoarece RS este linia mijlocie a trapezului $ABCD$, avem și $RS \parallel AD$. Din relațiile $PR \parallel AD$ și $RS \parallel AD$, rezultă că dreptele PR și RS coincid, deci punctele P , R și S sunt coliniare.....3 puncte

b) Demonstrăm analog că punctele R , S și Q sunt coliniare, deci punctele P , R , S și Q sunt coliniare.

Astfel, avem $PQ = PR + RS + SQ = \frac{AB}{2} + \frac{BC + AD}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{P_{ABCD}}{2}$ 4 puncte

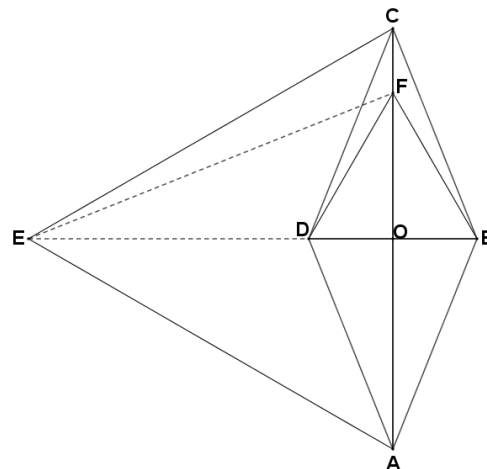




Problema 4.

Se consideră rombul $ABCD$, de centru O și triunghiurile echilaterale ACE și BDF , astfel încât $D \in (EO)$ și $F \in (CO)$.

- Calculați $m(\angle AFD) + m(\angle FAE)$.
- Demonstrați că $AD \perp EF$ și $BF \perp CE$.
- Demonstrați că $AO \cdot FO = BO \cdot EO$.



Soluție și barem:

- Deoarece triunghiul BDF este echilateral și $FO \perp BD$, rezultă că FO este bisectoarea unghiului BFD . Așadar, $m(\angle AFD) + m(\angle FAE) = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ 3 puncte
- Din relația $m(\angle AFD) + m(\angle FAE) = 90^\circ$, rezultă că $DF \perp AE$. Pe de altă parte, cum $ABCD$ este romb avem și $EO \perp AF$, deci punctul D este ortocentrul triunghiului AEF , ceea ce înseamnă că $AD \perp EF$.
Întrucât $AD \perp EF$ și $BC \parallel AD$, rezultă că $EF \perp BC$, de unde, având în vedere că $CO \perp BE$ deducem că punctul F este ortocentrul triunghiului BCE , deci $BF \perp CE$ 2 puncte
- Deoarece $m(\angle BFO) = m(\angle AEO) = 30^\circ$ și $m(\angle OBF) = m(\angle OAE) = 60^\circ$, rezultă că triunghiurile FOB și EOA sunt asemenea, deci $\frac{FO}{EO} = \frac{BO}{AO}$ sau $AO \cdot FO = BO \cdot EO$ 2 puncte