



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2013



CLASA a IX-a

PROBLEMA 1. a) Demonstrați ca pentru orice a, b, x, y strict pozitive avem

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}.$$

b) Fie $x, y, z > 0$ cu $2xyz = 1$. Demonstrați ca

$$\frac{xy^2}{x^3+1} + \frac{yz^2}{y^3+1} + \frac{zx^2}{z^3+1} \geq 1.$$

Olimpiada Rusia 2012

PROBLEMA 2. Fie a, b reale pozitive astfel încât ecuațiile

$$(a+b-x)^2 = a-b, \text{ cu rădăcinile reale } x_1 < x_2$$

$$(ab+1-x)^2 = ab-1, \text{ cu rădăcinile reale } x_3 < x_4.$$

Demonstrați ca dacă rădăcinile x_2, x_4 sunt egale, atunci și rădăcinile x_1, x_3 sunt egale.

Olimpiada Bulgaria

PROBLEMA 3. Se considera pentagonul convex $ABCDE$ și se notează cu M, N, P, Q, R mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE, EA iar cu A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 mijloacele segmentelor NQ, PR, QM, RN, MP . Să se arate că:

$$a) \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{EE_1} = 0.$$

$$b) \text{Raportul ariilor pentagoanelor } A_1B_1C_1D_1E_1 \text{ și } ABCDE \text{ este } \frac{1}{16}.$$

Prof. univ. Vasile Pop

PROBLEMA 4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un sir de numere reale cu $a_1 = a_2 = 1$ și

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{3^n}, n \geq 1.$$

Să se arate că $a_n < 2$, oricare ar fi $n \geq 1$.

G.M./11-2012

Subiect selectat de Inspector de specialitate, prof. Gheorghe Ciucă

NOTA: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.