

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ****ETAPA LOCALĂ – 25 FEBRUARIE 2023****BAREM Clasa a VII-a**

Problema 1. Se consideră numerele: $m = \sqrt{(5-3\sqrt{3})^2} + \sqrt{(3\sqrt{3}+5)^2}$,

$$n = \sqrt{3}^{-1} \cdot \sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{5^2 - 3^2}}}, \quad p = (2022^{2022})^{2022^{2022}}, \quad q = 2022^{2022^{2023}} \text{ și } s = mn + \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Aflați numărul real x știind că $[2x - 2023] = x + s$, unde cu $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a .

Soluție: $m = \sqrt{(5-3\sqrt{3})^2} + \sqrt{(3\sqrt{3}+5)^2} = |5-3\sqrt{3}| + |3\sqrt{3}+5| = 5-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+5 = 6\sqrt{3} \dots\dots\dots 1p$

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{16}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{20 - \sqrt{16}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{16} = \frac{4}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots 1p$$

$$p = (2022^{2022})^{2022^{2022}} = 2022^{2022 \cdot 2022^{2022}} = 2022^{2022^{2023}} = q \dots\dots\dots 1p$$

$$s = mn + \sqrt{\frac{p}{q}} = 6\sqrt{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{p}{p}} = 24 + 1 = 25 \dots\dots\dots 1p$$

$$[2x - 2023] = x + 25, \quad [2x - 2023] \in \mathbb{Z} \text{ și } 25 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$[2x - 2023] = 2x - 2023 \Rightarrow 2x - 2023 = x + 25 \Rightarrow x = 2048 \dots\dots\dots 2p$$

Problema 2. Numerele raționale nenule x, y, z verifică egalitatea $xy + yz + zx = 10xyz$.

a) Găsiți un triplet (x, y, z) care verifică egalitatea de mai sus.

b) Calculați valoarea expresiei $E = \frac{x+202}{x} + \frac{y+202}{y} + \frac{z+202}{z}$.

Soluție: a) de exemplu $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$ și $z = \frac{1}{5} \dots\dots\dots 3p$

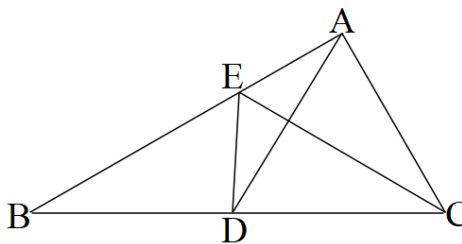
$$b) E = \frac{x+202}{x} + \frac{y+202}{y} + \frac{z+202}{z} = \frac{x}{x} + \frac{202}{x} + \frac{y}{y} + \frac{202}{y} + \frac{z}{z} + \frac{202}{z} = 3 + 202 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \dots\dots\dots 3p$$

$$E = 3 + 202 \cdot 10 = 2023 \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3. Se consideră un triunghi ABC în care AD este mediană, $D \in BC$ și CE este bisectoarea unghiului $\angle ACB$, $E \in AB$. Dacă $AC \equiv CD$ și $CE \equiv EB$, arătați că:

- a) $CE \perp AD$;
- b) $\triangle ADE$ este isoscel;
- c) $\angle ABC = 30^\circ$.

Soluție:



- a) $AC \equiv CD \Rightarrow \triangle ACD$ isoscel, CE – bis. $\angle ACB \Rightarrow CE$ este înălțime în $\triangle ACD \Rightarrow CE \perp AD \dots\dots\dots 2p$
- b) $\triangle ACD$ isoscel și CE – bis. $\angle ACB \Rightarrow CE$ mediatoarea seg. $AD \Rightarrow EA = ED \Rightarrow \triangle ADE$ isoscel.2p
- c) $CE \equiv EB \Rightarrow \triangle EBC$ isoscel, ED mediană în $\triangle EBC \Rightarrow ED$ înălțime în $\triangle EBC \Rightarrow \angle EDC = 90^\circ \dots\dots 1p$
 $\triangle CAE \equiv \triangle CDE (L.L.L.) \Rightarrow \angle EAC = \angle EDC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ este dreptunghic.1p
 $\triangle ABC$ dr. în A și $AC = \frac{BC}{2} \Rightarrow \angle ABC = 30^\circ \dots\dots\dots 1p$

Problema 4. Fie M un punct pe latura BC a paralelogramului $ABCD$ și E punctul de intersecție a dreptelor BD și AM . Demonstrați că aria triunghiului AED este egală cu suma ariilor triunghiurilor DCM și EMB .

Soluție:

$$A_{\triangle AMD} = \frac{AD \cdot d(M; AD)}{2} = \frac{A_{ABCD}}{2} \quad (1) \dots\dots\dots 2p$$

$$A_{\triangle BCD} = \frac{A_{ABCD}}{2} \quad (2) \dots\dots\dots 1p$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow A_{\triangle AMD} = A_{\triangle BCD} \quad (3) \dots\dots\dots 1p$

$$A_{\triangle AED} = A_{\triangle AMD} - A_{\triangle EMD} \quad (4) \dots\dots\dots 1p$$

$$A_{\triangle DCM} + A_{\triangle EMB} = A_{\triangle BCD} - A_{\triangle EMD} \quad (5) \dots\dots\dots 1p$$

Din (3), (4), (5) $\Rightarrow A_{\triangle AED} = A_{\triangle DCM} + A_{\triangle EMB} \dots\dots\dots 1p$

