

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Arătați că dacă a, b, c sunt numere naturale diferite, astfel încât $a^2 = b^2 + c^2$, atunci cel puțin unul dintre ele este multiplu de 5.

Presupunem că nici un număr nu este multiplu de 5.	2p
Rezultă $u(a^2), u(b^2)$ și $u(c^2) \in \{1, 4, 6, 9\}$, $u(x)$ fiind ultima cifră a lui x .	2p
De aici rezultă că $u(b^2 + c^2) \in \{0, 2, 3, 5, 7, 8\}$.	2p
Contradicție cu $u(a^2) \in \{1, 4, 6, 9\}$.	1p

SUBIECTUL 2

Se consideră numărul $N = \overline{abcdef}$. Să se demonstreze că numărul N este divizibil cu 7 dacă și numai dacă $\overline{ef} + 2 \cdot \overline{cd} + 4 \cdot \overline{ab}$ este divizibil cu 7. Folosind eventual acest rezultat să se arate că numărul $1...12...2...9...9$ este divizibil cu 7, știind că fiecare cifră de la 1 la 9 apare de 12 ori.

Dacă $A = \overline{ef} + 2 \cdot \overline{cd} + 4 \cdot \overline{ab}$, atunci $N - A = 98 \cdot \overline{cd} + 9996 \cdot \overline{ab} = 7(14 \cdot \overline{cd} + 1428 \cdot \overline{ab}) : 7$.	2p
Egalitatea anterioară demonstrează ambele implicații: $N : 7$ dacă și numai dacă $A : 7$.	2p
Numărul $N = 1...12...2...9...9$ este divizibil cu 111111 care este divizibil cu 7.	2p
Numărul 111111 este divizibil cu 7 se arată fie utilizând rezultatul anterior, fie $111111 : 1001$ și $1001 : 7$, fie $111111 = 7 \cdot 15873$.	1p

SUBIECTUL 3

- a) Arătați că numărul 2^{20} are 7 cifre.
b) Arătați că numărul 2^{130} are 40 de cifre.

Se arată că: $10^6 < 2^{20} < 10^7$ sau se calculează $2^{20} = 1048576$.	3p
Trebuie arătat că $10^{39} < 2^{130} < 10^{40}$.	2p
Prima parte a inegalității se obține din $(10^3)^{13} < (2^{10})^{13} \Leftrightarrow 1000^{13} < 1024^{13}$ (A).	1p
A doua parte se obține din $(2^{13})^{10} < (10^4)^{10} \Leftrightarrow 8192^{10} < 10000^{10}$ (A).	1p

SUBIECTUL 4

- a) Aflați cel mai mare număr de cinci cifre care împărțit la 98 dă restul 97.
b) Aflați xy , știind că numărul $x00y21$ împărțit la $xyyx$ dă câtul xy și restul yy .

a)

$100000 = 98 \cdot 1020 + 40$ sau $99999 = 98 \cdot 1020 + 39$.	1p
Și atunci numărul este $98 \cdot 1019 + 97 = 99959$.	2p

b)

$x00y21 = \overline{xyyx} \cdot \overline{xy} + \overline{yy}$	1p
Analizând egalitatea după ultima cifră avem: $u(x \cdot y + y) = u[y(x + 1)] = 1$.	1p
Dacă se aplică criteriul de divizibilitate cu 11, cum membrul drept este divizibil cu 11 se obține din membrul stâng $y = x + 1$ și atunci $u(y^2) = 1$, de unde $y = 9, x = 8$ și numărul este 89. Dacă nu se aplică criteriul de divizibilitate cu 11, deoarece $x \neq 0, y \neq 1$, se analizează cazurile: $x = 2, y = 7; \quad x = 6, y = 3; \quad x = 8, y = 9;$	2p

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Arătați că numărul:

$$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 70 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{70} \right) \text{ este natural și se divide cu } 71.$$

$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 70 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 70 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 70 \cdot \frac{1}{3} + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 70 \cdot \frac{1}{70}.$	1p
$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 70 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 70 + 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 70 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 69.$	1p
Ceea ce înseamnă că n este număr natural.	1p
n are 70 de termeni și se grupează câte 2 termeni egal depărtați de capete.	1p
$n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 70 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 69) + (1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 70 + 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 68 \cdot 70) + \dots + (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 34 \cdot 36 \cdot \dots \cdot 70 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 35 \cdot 37 \cdot \dots \cdot 70).$	1p
$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 69 (70 + 1) + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 68 \cdot 70 (69 + 2) + \dots + (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 34 \cdot 37 \cdot \dots \cdot 70 (36 + 35)).$	1p
Cum suma din fiecare paranteză este 71, rezultă că n se divide cu 71.	1p

SUBIECTUL 2

a) Arătați că $\frac{3^{10} + 7 \cdot 3^{11}}{8 \cdot 3^{10} + 3^{11}}$ este număr natural.

b) Arătați că dacă a și b sunt numere naturale și $2a + 3b$ este divizibil cu 11, atunci fracția $\frac{a + 7b}{8a + b}$ este reductibilă.

a)

$\frac{3^{10} + 7 \cdot 3^{11}}{8 \cdot 3^{10} + 3^{11}} = \frac{3^{10} (1 + 7 \cdot 3)}{3^{10} (8 + 3)} =$	1p
$= \frac{3^{10} \cdot 22}{3^{10} \cdot 11} = 2 \in \mathbb{N}.$	1p

b)

$2a + 3b = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow 6(2a + 3b) = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow 12a + 18b = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow a + 7b = \mathcal{M}_{11} (1).$	2p
Apoi $2a + 3b = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow 4(2a + 3b) = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow 8a + 12b = \mathcal{M}_{11} \Rightarrow 8a + b = \mathcal{M}_{11} (2).$	2p
Din (1) și (2), rezultă că fracția $\frac{a + 7b}{8a + b}$ este reductibilă.	1p

SUBIECTUL 3

În jurul punctului O se formează unghiurile AOB, BOC, COD, DOA. Se știe că $\angle AOB$ și $\angle BOC$ sunt complementare, iar $\angle AOB$ și $\angle COD$ sunt suplementare. Dacă [OM este bisectoarea $\angle BOC$, [ON este bisectoarea $\angle COD$ și [OP este bisectoarea $\angle AOD$, aflați:

a) $m(\angle NOP)$.

b) $m(\angle AOB)$, știind că $m(\angle POM) = 132^\circ$.

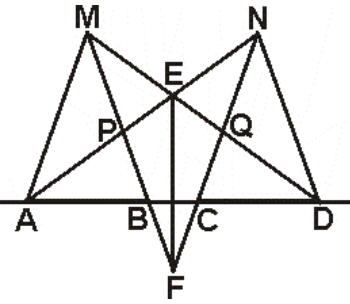
c) $m(\angle AOB)$, știind că $m(\angle COD)$ este de 4 ori mai mare decât $m(\angle BOC)$.

	a) $m(\angle NOP) = (360^\circ - 90^\circ) : 2 = 135^\circ.$	3p
	b) Dacă $m(\angle AOB) = x$, $m(\angle BOC) = y$, $m(\angle COD) = z$, $m(\angle DOA) = t$, avem $x + \frac{y}{2} + \frac{t}{2} = 132^\circ$, rezultă $2x + y + t = 264^\circ$, dar $y + t = 180^\circ$, de unde $2x = 84^\circ$ și $x = 42^\circ$.	2p
	c) $z = 4y$ și $x + z = 180^\circ$, rezultă $x + 4y = 180^\circ$, dar $x + y = 90^\circ$, de unde $3y = 90^\circ$; $y = 30^\circ$ și atunci $x = 60^\circ$.	2p

SUBIECTUL 4

În același semiplan mărginit de o dreaptă d se construiesc triunghiurile isoscele congruente ABM și CDN de baze $[AB]$, respectiv $[CD]$, unde A, B, C, D aparțin dreptei d în această ordine. Dacă $AN \cap MD = \{E\}$, $MB \cap NC = \{F\}$, $AN \cap MB = \{P\}$, $MD \cap NC = \{Q\}$ demonstrați că $AP = DQ$ și $EF \perp d$.

(Se poate utiliza teorema: Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă unghiurile de la bază sunt congruente).

	$\triangle ADN \cong \triangle BAM (LUL) \Rightarrow \angle MDA \cong \angle NAD.$	1p
	$\triangle PAB \cong \triangle QDC (ULU) \Rightarrow AP = DQ.$	2p
	$\angle MDA \cong \angle NAD$, rezultă $AE = DE$, dar $AP = DQ$ se obține $PE = QE (1).$	1p
	$\angle FBC \cong \angle FCB$ (fiind opuse la vârf cu unghiurile de la bazele triunghiurilor isoscele congruente) $\Rightarrow FB = FC$, dar $PB = QC$ din $\triangle PAB \cong \triangle QDC$, se obține $PF = QF (2).$	1p
	Din (1) și (2), rezultă $\triangle EPF \cong \triangle EQF (LLL)$, de unde $\angle EFP \cong \angle EFQ$ și atunci $[FE]$ este bisectoarea unghiului BFC , dar $\triangle FBC$ este isoscel, rezultă $EF \perp d$. Obs. Se va urmări echivalența punctajului pentru fiecare cale de rezolvare.	2p

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1 Se consideră mulțimile: $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{3n+2}{2n+1}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ și

$B = \left\{ y \in \mathbb{Q} \mid y = \frac{5m+3}{3m+1}, m \in \mathbb{Z} \right\}$. Determinați elementele mulțimii $A \cap B$.

Dacă $z \in A \cap B$, atunci există n și m numere întregi, astfel încât $\frac{3n+2}{2n+1} = \frac{5m+3}{3m+1}$.	2p
Se obține $n = \frac{m-1}{m+3} = 1 - \frac{4}{m+3}$.	2p
Cum $n \in \mathbb{Z}$, rezultă $\frac{4}{m+3} \in \mathbb{Z}$, de unde $m \in \{-7; -5; -4; -2; -1; 1\}$.	2p
Rezultă $A \cap B = \left\{ \frac{8}{5}; \frac{11}{7}; \frac{17}{11}; \frac{7}{5}; 1; 2 \right\}$.	1p

SUBIECTUL 2 Calculați $x + y + z$, știind că: $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3}$ și $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 54$.

VARIANTA 1 DE NOTARE

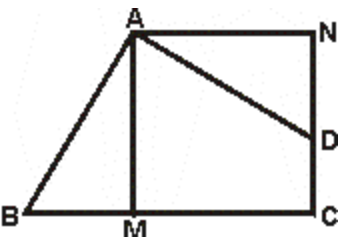
Egalitatea $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3}$ implică $\frac{x+1}{x} = \frac{y+2}{y} = \frac{z+3}{z}$.	1p
De unde $1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{2}{y} = 1 + \frac{3}{z}$.	1p
Și atunci $\frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z}$.	1p
Cu $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 54$, se obține $\frac{3}{x} = 54$ și $x = \frac{1}{18}$.	2p
$y = \frac{1}{9}$ și $z = \frac{1}{6}$.	1p
$x + y + z = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.	1p

VARIANTA 2 DE NOTARE

Egalitatea $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2}$ implică $x(y+2) = y(x+1)$ și se obține $y = 2x$.	2p
Analog din $\frac{x}{x+1} = \frac{z}{z+3}$ se obține $z = 3x$.	1p
Și atunci $\frac{1}{x} + \frac{2}{2x} + \frac{3}{3x} = 54$, de unde $x = \frac{1}{18}$.	2p
$y = \frac{1}{9}$ și $z = \frac{1}{6}$.	1p
$x + y + z = \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.	1p

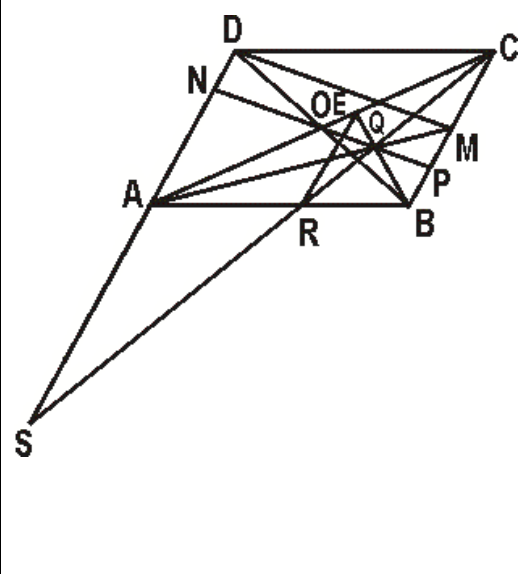
SUBIECTUL 3

În patrulaterul ABCD, $m(\angle A) = m(\angle C) = 90^\circ$ și $AB = AD$. Dacă $AM \perp BC$, cu $M \in (BC)$, arătați că $\mathcal{A}_{[ABCD]} = AM^2$.

	Fie $AN \perp DC$, $N \in DC$.	1p
	$\triangle ABM \cong \triangle ADN$ (IU) $\Rightarrow AN = AM$.	2p
	AMCN este pătrat.	1p
	$\mathcal{A}_{[ABCD]} = \mathcal{A}_{[AMCN]}$.	2p
	$\mathcal{A}_{[ABCD]} = AM^2$.	1p

SUBIECTUL 4

În paralelogramul ABCD, $AC \cap BD = \{O\}$, M este mijlocul laturii [BC]. Prin O se construiește $NP \parallel DM$, $N \in (AD)$, $P \in (BC)$. Dacă $AM \cap NP = \{Q\}$ și $CQ \cap AB = \{R\}$, arătați că rapoartele $\frac{AR}{AB}$ și $\frac{QR}{QC}$ au aceeași valoare și determinați această valoare.

	Fie $\{E\} = AC \cap BQ$. Aplicând teorema lui Ceva în $\triangle ABC$ avem: $\frac{RA}{RB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{RA}{RB} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow RE \parallel BC.$	2p
	Și atunci $\frac{AR}{AB} = \frac{RE}{BC} = \frac{QR}{QC}.$	1p
	Apoi pentru calcularea valorii, fie $CQ \cap AD = \{S\}$. În $\triangle BMD$, $OB = OD$ și $OP \parallel DM \Rightarrow PM = PB$. Avem $\frac{PM}{BC} = \frac{1}{4}.$	1p
	PMDN fiind paralelogram, rezultă $PM = DN$ și $\frac{PM}{AN} = \frac{1}{3}.$	1p
	Avem: $\frac{1}{3} = \frac{PM}{AN} = \frac{QM}{AQ} = \frac{MC}{AS}.$ și de aici $AS = 3 \cdot MC.$	1p
	Apoi $\frac{AR}{RB} = \frac{AS}{BC} = \frac{3}{2}$, în final $\frac{AR}{AB} = \frac{3}{5} = \frac{QR}{QC}.$	1p

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Determinați numerele raționale x și y știind că: $16,5 - \left(\frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2-2| \right)^2 = 10\sqrt{2}$.

Ecuția este echivalentă cu: $\left(\frac{ x-1 }{\sqrt{2}} - y^2-2 \right)^2 = 16,5 - 10\sqrt{2}$	1p
De unde $\frac{ x-1 }{\sqrt{2}} - y^2-2 = \pm \sqrt{16,5 - 10\sqrt{2}}$	1p
Sau: $\frac{ x-1 }{\sqrt{2}} - y^2-2 = \pm \left(\frac{5}{\sqrt{2}} - 2 \right)$	1p
Ecuția $\frac{ x-1 }{\sqrt{2}} - y^2-2 = -\frac{5}{\sqrt{2}} + 2 \Leftrightarrow \frac{ x-1 +5}{\sqrt{2}} = y^2-2 +2$ nu are soluții raționale.	1p
Ecuția $\frac{ x-1 }{\sqrt{2}} - y^2-2 = \frac{5}{\sqrt{2}} - 2 \Leftrightarrow \frac{ x-1 -5}{\sqrt{2}} = y^2-2 -2$.	1p
$\sqrt{2}$ fiind irațional, avem: $ x-1 -5=0$ și $ y^2-2 -2=0$. De unde $x \in \{-4; 6\}$ și $y \in \{-2; 0; 2\}$	1p
Se obține $S = \{(-4; -2), (-4; 0), (-4; 2), (6; -2), (6; 0), (6; 2)\}$.	1p

SUBIECTUL 2

Arătați că, dacă a, b, c sunt numere raționale nenule, astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, atunci numărul

$N = \left(\frac{ab}{c} + 1 \right) \left(\frac{bc}{a} + 1 \right) \left(\frac{ac}{b} + 1 \right)$ este nenegativ și $\sqrt{N}$ este rațional.

Din relația dată se obține $ab + bc + ca = abc$, de unde $\frac{ab}{c} = ab - a - b$	1p
Apoi $\frac{ab}{c} + 1 = ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$.	2p
De unde $N = (a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2 \geq 0$.	2p
Și $\sqrt{N} = (a-1)(b-1)(c-1) \in \mathbb{Q}$.	2p

SUBIECTUL 3

În tetraedrul regulat ABCD, de muchie a , planul determinat de muchia AB și mijlocul O al înălțimii [DG] intersectează muchia [DC] în punctul M. Aflați:

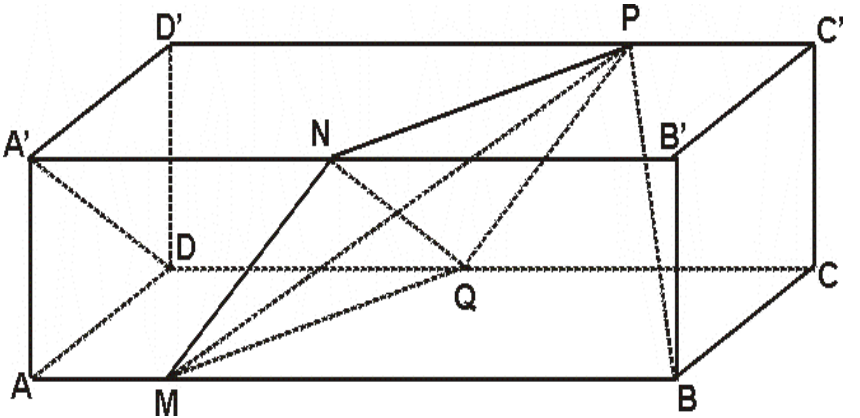
- Lungimile laturilor triunghiului ABM.
- Sinusul unghiului diedru format de planul (ABM) cu planul (ABC).

	Fie N mijlocul lui [AB] și $PG \parallel MN$, $P \in [DC]$.	1p
	OM $\parallel$ GP și OD=OG $\Rightarrow$ DM = MP și atunci DP=2MP. Apoi $PG \parallel MN \Rightarrow \frac{PC}{MP} = \frac{GC}{GN} = 2$ și atunci PC=2MP. Vom avea DP=PC=GP= $\frac{a}{2}$. Și MN= $\frac{3}{2}PG = \frac{3a}{4}$.	2p
	Se obține din $\triangle MAN$ sau $\triangle MAP$ că MA= $\frac{a\sqrt{13}}{4}$ =MB.	2p
	MN $\perp$ AB, CN $\perp$ AB, rezultă unghiul diedru se află din $\triangle ONG$ și avem $\sin(\angle ONG) = \frac{OG}{ON} = \frac{a\sqrt{6}}{6} : \left(\frac{3a}{4} - \frac{a}{4} \right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.	2p

SUBIECTUL 4

În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu $AB=24$ cm, $AD=AA'=6$ cm, se consideră pe muchiile $[AB]$, $[A' B']$ și $[D' C']$ punctele M , N , P , astfel încât $AM=6$ cm, $A' N=12$ cm, $D' P=18$ cm.

- Stabiliți natura patrulaterului $MNPQ$ și calculați-i aria, unde $\{Q\}=DC \cap (MNP)$.
- Determinați distanța de la punctul B la planul (MNP) .

	a) Punctele de intersecție dintre (MNP) și dreptele AB, A'B', D'C' și DC formează un paralelogram, dar prin calcul $MN=NP=6\sqrt{2}$, rezultă MNPQ romb.	2p
	Cum $AM+D'P=A'N+DQ$, rezultă $DQ=12\text{ cm}=A'N$ și atunci $NQ=A'D=6\sqrt{2}$. Rombul este format din două triunghiuri echilaterale. Aria rombului = $2 \cdot \frac{(6\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}.$	2p
b) $BP=6\sqrt{3}$, $MP=6\sqrt{6}$ și $MB=18$, rezultă din reciproca teoremei lui Pitagora $BP \perp MP$, dar $NQ \parallel A'D$ și $A'D \perp (ABC'D')$, rezultă $BP \perp NQ$, MP și NQ fiind concurente dă că $BP \perp (MNP)$.	2p	
Distanța de la B la (MNP) fiind $BP=6\sqrt{3}$.	1p	