

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013

CLASA a X - a

1. Fie funcția $f: \left[\frac{5}{2}, \infty\right) \rightarrow \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$, $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Se cer:
- Demonstrați că f inversabilă și determinați inversa ei;
 - Demonstrați că $\left\{x \in \left[\frac{5}{2}, \infty\right) / f(x) \leq f^{-1}(x)\right\} = \left\{x \in \left[\frac{5}{2}, \infty\right) / f(x) \leq x \leq f^{-1}(x)\right\}$;
 - Determinați mulțimea: $M = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 5 \geq 0, 2x^2 - 10x + 7 \leq \sqrt{4x + 1}\}$.

Soluție:

- a) f strict crescătoare pe $\left[\frac{5}{2}, \infty\right) \Rightarrow f$ injectivă
 $Im f = \left[-\frac{1}{4}, \infty\right) \Leftrightarrow f$ surjectivă
Deci f bijectivă, rezultă că f este inversabilă și $f^{-1}: \left[-\frac{1}{4}, \infty\right) \rightarrow \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$, $f^{-1}(x) = \frac{5 + \sqrt{4x + 1}}{2}$. 3p
- b) Notăm cu A și B cele două mulțimi. Evident că $B \subset A$. Demonstrăm că $A \subset B$. Fie $x \in A$, oarecare. Atunci $f(x) \leq f^{-1}(x)$ (1).
Presupunem prin absurd că $f(x) > x$. Cum f este strict crescătoare rezultă că $f(f(x)) > f(x) > x \Leftrightarrow f(f(x)) > x$ și cum și f^{-1} este strict crescătoare, obținem că $f(x) > f^{-1}(x)$ ceea ce contrazice relația (1). Deci $f(x) \leq x$ și cum f^{-1} este strict crescătoare rezultă și că $x \leq f^{-1}(x)$.
Deci $x \in B$, adică $A \subset B$. 2p
- c) Relația se scrie $f(x) \leq f^{-1}(x)$ și, conform b) este echivalentă cu $f(x) \leq x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5}{2}, 3 + \sqrt{3}\right]$. 2p

2. Să se arate că $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in (0, \infty)$ are loc relația $\left\lceil \log_{2013} \frac{a^x + a^{-x}}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \log_{2012} \frac{a^x + a^{-x}}{2} \right\rceil$, unde $\lceil \cdot \rceil$ reprezintă partea întreagă.

Soluție:

Notăm $\frac{a^x + a^{-x}}{2} = t \geq 1$. Dacă $t \in [1, 2012)$ atunci $0 \leq \log_{2012} t, \log_{2013} t < 1$ și

$$\lceil \log_{2012} t \rceil = \lceil \log_{2013} t \rceil = 0. \quad (1) \quad 2p$$

Dacă $t \in [2012, 2013)$, atunci $1 \leq \log_{2012} t, \log_{2013} t < 1$ deci $0 = \lceil \log_{2013} t \rceil < \lceil \log_{2012} t \rceil = 1$. (2) 2p

Dacă $t \in [2013, \infty)$, atunci $\log_{2013} t < \log_{2012} t \Rightarrow \lceil \log_{2013} t \rceil \leq \lceil \log_{2012} t \rceil$. (3) 2p

Din (1), (2) și (3) avem cerința. 1p

3. Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $\log_y x > 0, \log_z y > 0, \log_x z > 0$. Demonstrați că $\log_y x + \sqrt{\log_z y} + \log_x z \geq 2\sqrt{2}$. Când avem egalitate?

Soluție:

Folosim inegalitatea mediilor pentru numerele pozitive $\log_y x, \frac{1}{2}\sqrt{\log_z y}, \frac{1}{2}\sqrt{\log_z y}, \log_x z$ și obținem:

$$\log_y x + \sqrt{\log_z y} + \log_x z \geq 4 \sqrt[4]{\frac{1}{4} \log_y x \cdot \log_z y \cdot \log_x z} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ (transformăm toți logaritmi în aceeași bază).}$$

Egalitatea are loc pentru: $\log_y x = \frac{1}{2}\sqrt{\log_z y} = \log_x z = \alpha \Leftrightarrow x = y^\alpha, z = x^\alpha, y = z^{4\alpha^2} \Leftrightarrow x = z^{\sqrt{2}}, y = z^2$. 7p

4. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}, |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ și $0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < \arg z_4 \leq \pi$. Demonstrați că $|z_1 + z_4| \leq |z_2 + z_3|$.

Soluție:

Fie $A_k, k = \overline{1, 4}$ imaginile geometrice ale celor patru numere complexe. Conform ipotezelor ele aparțin cercului de centru O și rază 1, chiar pe arc $\widehat{ABA'}$, în ordinea: A_1, A_2, A_3, A_4 . Dacă notăm cu P și Q mijloacele segmentelor $[A_1, A_4]$, respectiv $[A_2, A_3]$ rezultă evident că $OP < OQ$. Dar afixele lui P și Q sunt, respectiv, $\frac{z_1+z_4}{2}$ și $\frac{z_2+z_3}{2}$. Atunci relația $OP \leq OQ$ se scrie $\left| \frac{z_1+z_4}{2} \right| \leq \left| \frac{z_2+z_3}{2} \right| \Leftrightarrow |z_1 + z_4| \leq |z_2 + z_3|$. 7p

