

Soluții și bareme orientative
Clasa a XII-a
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. Se observă că:

$$\begin{aligned} 30 &= 5 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 \in H, 31 = 6 + 6 + 6 + 6 + 7 \in H, \\ 32 &= 6 + 6 + 6 + 7 + 7 \in H, 33 = 6 + 6 + 7 + 7 + 7 \in H, \\ 34 &= 6 + 7 + 7 + 7 + 7 \in H, 35 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 \in H. \end{aligned}$$

(3p)

Fie $n \in H, n \geq 36$. Conform teoremei de împărțire cu rest, $n = 6 \cdot q + r, q \in \mathbb{N}, r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Cum $n \geq 36$, rezultă $q - 5 \geq 1$ și $n = 6 \cdot (q - 5) + 30 + r$.

(2p)

Atunci $30 + r \in \{30, 31, 32, 33, 34, 35\}$, deci $30 + r \in H$ și

$$6 \cdot (q - 5) = \underbrace{6 + 6 + \dots + 6}_{\text{de } (q-5) \text{ ori}} \in H, \text{ prin urmare } n \in H, \text{ ceea ce trebuia demonstrat.}$$

(2p)

2. a) Notăm cu $A(x_1, x_2)$ matricea definită în enunț și astfel:

$$G_{2n} = \{A(x_1, x_2) | (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \text{ cu } x_1^2 \neq x_2^2\}.$$

Deoarece $A(x_1, x_2) = x_1 \cdot I_{2n} + x_2 \cdot J_{2n}$, unde J_{2n} este matricea cu **1** pe diagonala secundară și **0** în rest, iar $I_{2n} = J_{2n}^2$, avem:

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2) \cdot A(y_1, y_2) &= (x_1 \cdot I_{2n} + x_2 \cdot J_{2n}) \cdot (y_1 \cdot I_{2n} + y_2 \cdot J_{2n}) = \\ &= (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2) \cdot I_{2n} + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot J_{2n} = \\ &= A(x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \in G_{2n}, \text{ deoarece:} \\ (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2)^2 - (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)^2 &= (x_1^2 - x_2^2) \cdot (y_1^2 - y_2^2) \neq 0. \end{aligned}$$

Deci înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G_{2n} .

(2p)

Cum $I_{2n} = A(1, 0)$,

$$A(x_1, x_2) \cdot A\left(\frac{x_1}{x_1^2 - x_2^2}, -\frac{x_2}{x_1^2 - x_2^2}\right) = A(1, 0) = I_{2n}$$

$$\begin{aligned} \text{și } A(x_1, x_2) \cdot A(y_1, y_2) &= A(x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) = \\ &= A(y_1 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2, y_1 \cdot x_2 + y_2 \cdot x_1) = A(y_1, y_2) \cdot A(x_1, x_2), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ &(y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ cu } x_1^2 \neq x_2^2, y_1^2 \neq y_2^2, \text{ rezultă concluzia.} \end{aligned}$$

(3p)

b) Funcția $f: G_{2n} \rightarrow G_2, f(x_1 \cdot I_{2n} + x_2 \cdot J_{2n}) = x_1 \cdot I_2 + x_2 \cdot J_2$ este izomorfism de grupuri, deci $(G_{2n}, \cdot) \simeq (G_2, \cdot), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

(2p)

$$3. a) I = \int \frac{(x^2+1)^2+2x}{x^2+1} dx = \int (x^2 + 1) dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{x^3}{3} + x + \ln(x^2 + 1) + C.$$

(2p)

$$b) g \text{ primitiva lui } f \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)(x^2+1) - 2xf(x)}{(x^2+1)^2} = f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{x^2+1} = f(x) \cdot \left(1 + \frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x^2 + 1 + \frac{2x}{x^2+1}$$

(2p)

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^3}{3} + x + \ln(x^2 + 1) + C \Rightarrow f(x) = c \cdot e^{\frac{x^3}{3} + x + \ln(x^2 + 1)} \Rightarrow$$

$$f(x) = c \cdot (x^2 + 1) \cdot e^{\frac{x^3}{3} + x} \quad (2p)$$

$$g(0) = f(0) \Rightarrow f(0) = 1.$$

$$f(0) = c \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{\frac{x^3}{3} + x} \quad (2p)$$

4. Din relația c) deducem că pentru orice $x \in (0, \infty)$, avem:

$$\begin{aligned} f(x^3) &\leq x^2 \cdot f(x) \leq x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot f(\sqrt[3]{x}) \leq x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[9]{x^2} \cdot f(\sqrt[9]{x}) \leq \dots \leq \\ &\leq x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[9]{x^2} \cdot \dots \cdot \sqrt[3^n]{x^2} \cdot f(\sqrt[3^n]{x}), n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \quad (2p)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 \cdot f(x) &\leq x^{2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right)} \cdot f\left(x^{\frac{1}{3^n}}\right), n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) \leq x^{1 - \frac{1}{3^n}} \cdot f\left(x^{\frac{1}{3^n}}\right), n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \quad (2p)$$

Deoarece f este continuă în $x_0 = 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3^n}} = 1$, rezultă că $f(x) \leq x \cdot f(1)$.

Integrând ultima inegalitate pe $[1, 3]$, obținem: $\int_1^3 f(x) dx \leq f(1) \cdot \int_1^3 x dx = 4 \cdot f(1)$,

adică ceea ce trebuia demonstrat.

(3p)