

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 18 februarie 2018
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

CLASA a XI-a

1. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ și $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{a^{2^k} + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) (3p) Să se demonstreze că $s_n = \frac{1}{a-1} - \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}} - 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- b) (4p) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Dan Popescu

Soluție. a) Cerința se poate demonstra prin inducție sau formând o sumă telescopică astfel:

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{a^{2^k} + 1} = \sum_{k=0}^n \frac{2^k (a^{2^k} + 1 - 2)}{(a^{2^k} + 1)(a^{2^k} - 1)} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2^k}{a^{2^k} - 1} - \frac{2^{k+1}}{a^{2^{k+1}} - 1} \right) = \frac{1}{a-1} - \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}} - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Dacă $|a| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{2^{n+1}} = 0$ și atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$.

Dacă $|a| > 1$, notăm $x_n = \frac{a^{2^n}}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2^{n+1}-2^n}}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2^n}}{2} = +\infty$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty. \text{ Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{\frac{a^{2^{n+1}}}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}} \right), \text{ deci în cazul } |a| > 1 \text{ obținem } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{a-1}$$

Barem.

a) Demonstrează că $s_n = \frac{1}{a-1} - \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}} - 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.	3 p
b) Demonstrează că pentru $ a < 1$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$	2 p
Demonstrează că pentru $ a > 1$ avem $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{a-1}$	2 p

2. (7p) Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A^6 = I_3$. Demonstrați că $\det(A - A^*) = 0$ sau $\det(A + A^*) = 0$.
 Am notat cu A^* adjuncta matricei A .

Dumitru Crăciun

Soluție. $A^6 = I_3 \Rightarrow \det(A^6) = \det I_3 \Rightarrow (\det A)^6 = 1$ și cum $\det A \in \mathbb{R}$ obținem $\det A = \pm 1$.

Dacă $\det A = 1$ rezultă că A este inversabilă și $A^{-1} = A^*$, deci $AA^* = A^*A = I_3$ și $\det(A^*) = 1$.

Având în vedere că A și A^* comută, obținem $(A - A^*)^3 = A^3 - 3A^2A^* + 3A(A^*)^2 - (A^*)^3$ (1).

Înmulțind succesiv cu A^{-1} în relația $A^6 = I_3$ obținem $A^3 = (A^{-1})^3$, adică $A^3 = (A^*)^3$, iar din relația (1) rezultă $(A - A^*)^3 = -3AA^*(A - A^*)$ (2)

Dacă notăm $d = \det(A - A^*)$, trecând la determinanți în relația (2) obținem $d^3 = -27d$, adică $d(d^2 + 27) = 0$ de unde rezultă $\det(A - A^*) = 0$.

Dacă $\det A = -1$ rezultă că A este inversabilă cu $A^{-1} = -A^*$ și $\det(A^*) = 1$, iar relația (2) devine $(A + A^*)^3 = 3AA^*(A + A^*)$ de unde obținem $\det(A + A^*) = 0$.

Barem.

Obține $\det A = \pm 1$	1 p
Justifică $A^3 = (A^*)^3$	1 p
Obține relația (2)	2 p
$\det(A - A^*) = 0$	2 p
Finalizare	1 p

3. (7p) Să se arate că $\forall X, Y, Z \in M_3(\mathbb{C})$ avem $X \cdot Y \cdot Z - X \cdot {}^tY \cdot Z \neq I_3$.

Am notat cu tY transpusa matricei Y .

Dumitru Crăciun

Soluție. Dacă există matrice pentru care $X \cdot Y \cdot Z - X \cdot {}^tY \cdot Z = I_3$, atunci $X(Y - {}^tY)Z = I_3$.

Trecând aici la determinanți se obține $\det X \cdot \det(Y - {}^tY) \cdot \det Z = 1$ (1)

Notăm $A = Y - {}^tY$. Avem ${}^tA = {}^t(Y - {}^tY) = {}^tY - {}^t({}^tY) = {}^tY - Y = -(Y - {}^tY) = -A$, adică ${}^tA = -A$.

Rezultă că $\det({}^tA) = \det(-A) \Rightarrow \det A = (-1)^3 \det A \Rightarrow \det A = -\det A \Rightarrow \det(A) = 0$.

Acum relația (1) devine $0 = 1$, absurd!

Barem.

Obține relația (1)	2 p
Demonstrează că ${}^tA = -A$	2 p
Demonstrează că $\det(Y - {}^tY) = 0$	2 p
Finalizare	1 p

4. (7p) Fie $a, b > 0$. Considerăm șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit recurent astfel:

$$x_0 > 0 \quad \text{și} \quad x_{n+1} = \frac{a + bx_n - \sqrt{a^2 + 2abx_n}}{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Arătați că șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n = \frac{2^n a^n}{b^{2n}} x_n$ este convergent.

Ion Bursuc

Soluție. Observăm că $\forall n \in \mathbb{N}$ avem $x_{n+1} = \frac{(a + bx_n)^2 - (a^2 + 2abx_n)}{x_n(a + bx_n + \sqrt{a^2 + 2abx_n})}$, deci

$$x_{n+1} = \frac{b^2 x_n}{a + bx_n + \sqrt{a^2 + 2abx_n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prin inducție matematică se arată că $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ și cum $a, b > 0$ deducem că $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Deoarece } x_{n+1} = \frac{b^2 x_n}{a + bx_n + \sqrt{a^2 + 2abx_n}} \leq \frac{b^2 x_n}{2 + \sqrt{a^2}} = \frac{b^2 x_n}{2a} \Rightarrow \frac{2a}{b^2} x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2a}{b^2}\right)^{n+1} x_{n+1} \leq \left(\frac{2a}{b^2}\right)^n x_n \Rightarrow y_{n+1} \leq y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ adică șirul } (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ este descrescător.}$$

Cum șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător și mărginit inferior de 0, conform criteriului lui Weierstrass rezultă că șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

Barem.

$x_{n+1} = \frac{b^2 x_n}{a + bx_n + \sqrt{a^2 + 2abx_n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$	2 p
Demonstrează că $y_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$	1 p
Demonstrează că șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător	3 p
Finalizare	1 p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.