

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

Clasa a X – a

1.Feladat Adott az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat, ahol $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}$ (n darab gyök). Igazold, hogy bármely $n \geq 1$ esetén teljesülnek a következő összefüggések:

a) $x_n < 2$; b) $4(2 - x_{n+1}) > 2 - x_n$.

2.Feladat Határozd meg azokat az $f, g : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ injektív függvényeket, amelyek teljesítik a következő összefüggéseket:

a) $f(x \cdot f(y)) = f(x) \cdot f(y)$, minden $x, y \in (0, +\infty)$ esetén;

b) $g(x \cdot g(y)) = \frac{1}{g(g(x) \cdot y)}$, minden $x, y \in (0, +\infty)$ esetén.

3.Feladat Számítsd ki a $|z_1 + z_2 + z_3|$ értékét tudva, hogy z_1, z_2 és z_3 három olyan komplex szám, amelyekre $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, és $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Keress három olyan z_1, z_2 és z_3 komplex számot, amelyek teljesítik ezeket a feltételeket.

4.Feladat Igazold, hogy ha $a, b, c \in (0, 1)$ vagy $a, b, c \in (1, +\infty)$, akkor

$$\log_{a^2b} a + \log_{b^2c} b + \log_{c^2a} c \leq 1.$$

¹Munkaidő 3 óra;

²Minden feladat kötelező;

³Minden feladat 0 ponttól 7 pontig van osztályozva.