



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA A IX-A

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul I

Se consideră numerele reale strict pozitive  $a, b, c$ , astfel încât  $a + b + c = 1$ .

- a) Arătați că  $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} \geq 2$ ;
- b) Demonstrați că  $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} + \frac{b+1}{\sqrt{b+ac}} + \frac{c+1}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$ .

REZOLVARE

a) Deoarece  $a = 1 - b - c \Rightarrow \frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} = \frac{1-b-c+1}{\sqrt{1-b-c+bc}} = \frac{(1-b)+(1-c)}{\sqrt{(1-b)(1-c)}} \dots\dots\dots 2p$

Pentru că  $\frac{(1-b)+(1-c)}{2} \geq \sqrt{(1-b)(1-c)}$  se obține  $\frac{(1-b)+(1-c)}{\sqrt{(1-b)(1-c)}} \geq 2 \dots\dots\dots 1p$

b) Adunând  $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} \geq 2$ ,  $\frac{b+1}{\sqrt{b+ac}} \geq 2$ ,  $\frac{c+1}{\sqrt{c+ab}} \geq 2$ , rezultă

$\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} + \frac{b+1}{\sqrt{b+ac}} + \frac{c+1}{\sqrt{c+ab}} \geq 6 \dots\dots\dots 1p$

$6 \geq \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 1 \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \dots\dots\dots 2p$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$  adevărat  $\dots\dots\dots 1p$



## Subiectul II

Rezolvați ecuația  $[x] + \frac{2a}{[x]} = 2\{x\} + \frac{a}{\{x\}}$ , unde  $a \in (0, \infty)$ .

### REZOLVARE

Condiția de existență a ecuației este  $[x] \neq 0$  și  $\{x\} \neq 0 \Leftrightarrow x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z}) - (0, 1)$ .

Ecuația se mai scrie  $([x] - 2\{x\}) \left( 1 - \frac{a}{[x]\{x\}} \right) = 0$  ..... **2p**

Rezultă  $[x] = 2\{x\}$  sau  $[x]\{x\} = a$  ..... **1p**

Cazul I:  $[x] = 1$  și  $\{x\} = \frac{1}{2}$ , deci  $x = 1,5$  ..... **2p**

Cazul II:  $[x] = n$  și  $\{x\} = \frac{a}{n}$  cu  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n > a$ , deci  $x = n + \frac{a}{n}$  ..... **2p**

## Subiectul III.

Determinați șirul  $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^*$  știind că  $a_1 = 1$  și  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{4n+1}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### REZOLVARE

Pentru  $n=1$  se obține  $\frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{5}$ , dar  $a_1 = 1$ , rezultă  $a_2 = 5$ .

Pentru  $n=2$  se obține  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{2}{9}$ , dar  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 5$  se obține  $a_3 = 9$  ..... **2p**

Se intuiește că  $a_n = 4n - 3$ ,  $\forall n \geq 1$  și se demonstrează prin inducție matematică ..... **1p**

$P(n): a_n = 4n - 3$

$P(1): a_1 = 4 \cdot 1 - 3(A)$  ..... **1p**



Se presupun adevărate  $P(1), P(2), \dots, P(k)$

Se demonstrează  $P(k+1): a_{k+1} = 4k+1$  .....1p

$$\text{Egalitatea } \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4k-3)a_{k+1}} = \frac{k}{4k+1} \Leftrightarrow \frac{k-1}{4k-3} + \frac{1}{(4k-3)a_{k+1}} = \frac{k}{4k+1}$$

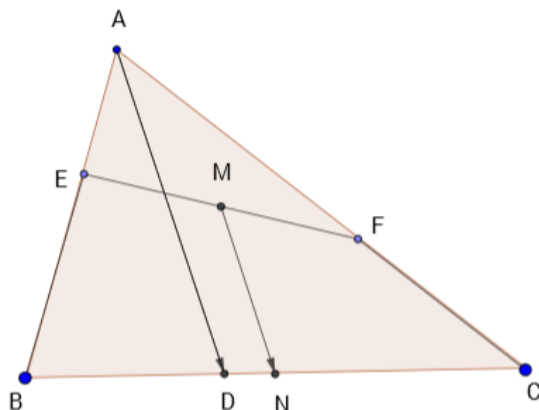
$$\frac{1}{(4k-3)a_{k+1}} = \frac{k}{4k+1} - \frac{k-1}{4k-3} \Leftrightarrow \frac{1}{(4k-3)a_{k+1}} = \frac{1}{(4k+1)(4k-3)} \Leftrightarrow a_{k+1} = 4k+1, \text{ finalizare.....2p}$$

#### Subiectul IV.

Fie triunghiul  $ABC$  cu  $AB \neq AC$  și lungimile laturilor  $BC=a$ ,  $AC=b$ ,  $AB=c$  și  $D \in (BC)$  astfel încât  $(AD)$  este bisectoarea  $\sphericalangle BAC$ .

- Demonstrați că  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{b+c}(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC})$ .
- Știind că  $E \in (AB)$ ,  $F \in (AC)$ ,  $M$  este mijlocul lui  $[EF]$  și  $N$  mijlocul lui  $[BC]$ , arătați că  $MN$  și  $AD$  sunt paralele dacă și numai dacă  $[BE] \equiv [CF]$ .

#### REZOLVARE





a) Din teorema bisectoarei  $BD = \frac{c}{b} DC$ , dar  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DC}$  au același sens rezultă

b)  $\overrightarrow{BD} = \frac{c}{b} \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{c}{b} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{b+c} (b \overrightarrow{AB} + c \overrightarrow{AC})$ .....**2p**

c) Deoarece  $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AB}$  sunt coliniari cu același sens  $\overrightarrow{EB} = k \overrightarrow{AB}, k > 0$

La fel  $\overrightarrow{FC} = p \overrightarrow{AC}, p > 0$ .....**1p**

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BN}$  și  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CN}$ , rezultă

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC}) = \frac{1}{2} (k \overrightarrow{AB} + p \overrightarrow{AC})$ .....**1p**

Dacă  $[BE] \equiv [CF], \overrightarrow{EB} = k \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FC} = p \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{FC} = p \overrightarrow{AC}$ , atunci  $k \cdot AB = p \cdot AC \Leftrightarrow kc = pb \Leftrightarrow \frac{k}{b} = \frac{p}{c}$

Rezultă  $\overrightarrow{MN}$  și  $\overrightarrow{AD}$  sunt coliniari, dar  $N \notin AD$  rezultă  $MN \parallel AD$ .....**2p**

Dacă  $MN \parallel AD \Rightarrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}$  coliniari  $\Leftrightarrow \frac{k}{b} = \frac{p}{c} \Leftrightarrow kc = pb \Leftrightarrow kAB = pAC$

$\Leftrightarrow BE = CF \Leftrightarrow [BE] \equiv [CF]$ .....**1p**

NOTĂ : Orice rezolvare corectă, diferită de barem, va primi punctajul corespunzător.