

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapă pe centru – 18.02.2018

Filieră teoretică: profil real-științe ale naturii

Clasa a X-a

1.a) Să se calculeze suma:

$$S = \lg \sqrt{x} + \lg \sqrt[2 \cdot 3]{x} + \lg \sqrt[3 \cdot 4]{x} + \dots + \lg \sqrt[2017 \cdot 2018]{x}, \quad x > 0.$$

b) Dacă $a, b, c \in (1, \infty)$, să se arate că:

$$\log_a^3(bc) + \log_b^3(ac) + \log_c^3(ab) \geq 24.$$

2. a) Se consideră expresia $E(x) = \frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

Să se determine valoarea expresiei pentru $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$, $a > 0, b > 0$.

b) Dacă $a, b > 0$ și $x_n = \lg \frac{(n+a)(n+b)}{(n+a+1)(n+b+1)}$ să se arate că:

$$S = \sum_{k=1}^n x_k + \lg(n+a+1) + \lg(n+b+1) \text{ nu depinde de } n.$$

3. a) Să se calculeze suma modulelor numerelor complexe z care verifică relația $z^2 = 1 - \frac{3}{4}i$.

b) Să se arate că $|1 - z_1 \cdot \bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

4. a) Să se calculeze modulul numărului complex

$$z = \left(\sqrt{2018 + \sqrt[n]{2018}} + i\sqrt{2018 - \sqrt[n]{2018}} \right)^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Fie mulțimea $A = \{z \in \mathbb{C} : z^2 + z + 1 = 0\}$. Să se calculeze

$$E(z) = \frac{z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^3 - 4}{z^{2018} + z}, \text{ știind că } z \in A.$$

Notă:

- Fiecare problemă este obligatorie.
- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu
- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapă pe centru – 18.02.2018

Filieră tehnologică: profil servicii, resurse naturale și protecția mediului

Clasa a X-a

1. a) Dacă $\frac{2^{\sqrt{3}} \cdot 8^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[3]{2^{\sqrt{27}}}}{(0,5)^{\sqrt{12}}} = 2^x$, să se arate că x^2 este număr natural.
 b) Fie $a = \log_2 3$. Să se calculeze în funcție de a expresia
 $E = \log_2 9 - \log_4 3 - \log_2 36 + \log_3 144$.
2. a) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care sunt definiți simultan următorii logaritmi
 $\log_3 (2x + 1)$ și $\log_{\frac{x+2}{3-x}} (x^2 - 2x)$;
 b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care expresia
 $\sqrt{(2-m)x^2 - 2x - 2 + 3m}$ este bine definită $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. a) Precizați dacă există $z \in \mathbb{C}$ care să verifice simultan condițiile:
 $|z - 1 - 2i| = 3$ și $\operatorname{Re}(z) \geq 5$.
 b) Să se determine $z \in \mathbb{C}$ din egalitatea $\operatorname{Re} \left(\frac{2i-z}{i-z} \right) = 1$.
4. Fie ecuația $x^2 - 2x + m + 3 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.
 a) Pentru $m = 1$, rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația;
 b) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că ecuația are rădăcinile în $\mathbb{C} - \mathbb{R}$;
 c) Pentru $m = 0$ și x_1, x_2 rădăcinile acestei ecuații, să se calculeze
 $E = \frac{x_1^2 - 2x_1 + 5}{x_1} + \frac{x_2^2 - 2x_2 + 5}{x_2}$.

Notă:

- Fiecare problemă este obligatorie.
- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu
- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapă pe centru – 18.02.2018

Filieră tehnologică: profil tehnic

Clasa a X-a

1. a) Dacă $\frac{2^{\sqrt{3}} \cdot 8^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[3]{2^{\sqrt{27}}}}{(0,5)^{\sqrt{12}}} = 2^x$, să se arate că x^2 este număr natural.

b) Fie $a = \log_2 3$. Să se calculeze în funcție de a expresia

$$E = \log_2 9 - \log_4 3 - \log_2 36 + \log_3 144$$

2 a) Să se determine $x \in R$ pentru care este definit logaritmul $\log_{4-x}(x^2 - x - 2)$;

b) Să se determine $x \in R$ pentru care este definită expresia $\sqrt{-x^2 + x + 6} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{1-|x|}}$.

3. a) Să se determine numerele reale a, b astfel încât să aibă loc egalitatea

$$(a + bi)(2 - i) = 8 + i$$

b) Să se calculeze $(1 + i)^{2018} + (1 - i)^{2018}$

4 Fie ecuația $x^2 - 2x + m + 3 = 0$, $m \in R$.

a) Pentru $m = 1$, rezolvați în C ecuația;

b) Să se determine $m \in R$ știind că ecuația are rădăcinile în $C - R$;

c) Știind că x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației pentru $m = 0$, să se calculeze

$$E = \frac{2018}{x_1} + \frac{2018}{x_2} + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2.$$

Notă:

- Fiecare problemă este obligatorie.
- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu
- Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapă pe centru – 18.02.2018

Filieră teoretică: profil umanist-filologie și științe sociale

Clasa a X-a

1. a) Să se calculeze expresia $E = \frac{(4^{n+1} - 4^n)^{\frac{1}{2}}}{(8^{n-1} - 7 \cdot 8^{n-2})^{\frac{1}{3}}}$, $n \in \mathbb{Z}$.
- b) Arătați că numărul $\sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} - \sqrt{5}$ este întreg.
2. a) Dacă $\frac{2^{\sqrt{3}} \cdot 8^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[3]{2^{\sqrt{27}}}}{(0,5)^{\sqrt{12}}} = 2^x$, să se arate că x^2 este număr natural.
- b) Fie $a = \log_2 3$. Să se calculeze în funcție de a expresia
 $E = \log_2 9 - \log_4 3 - \log_2 36 + \log_3 144$
3. a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care este definit logaritmul $\log_{4-x}(x^2 - x - 2)$;
- b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care este definită expresia $\sqrt{-x^2 + x + 6} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{1-|x|}}$.
4. a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care expresia
 $\sqrt{(2-m)x^2 - 2x - 2 + 3m}$ este bine definită $\forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Fie $a, b > 0$. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:
 $a^2 + b^2 = 27ab$ și $\frac{\lg a + \lg b}{2} = \lg \frac{a-b}{5}$.

Notă:

- Fiecare problemă este obligatorie.
- Punctaj: 10 puncte pentru fiecare problemă, din care 1 punct din oficiu
- Timp de lucru: 3 ore.